Le chemin de la réussite

PHYSIQUE & CHIMIE

BACCALAURÉAT

Exercices et problèmes corrigés avec résumé de cours

Tome I

Mohamed Aoun

Ahlem Mabrouk

Ridha Kammoun

PRÉFACE

Après une classe de 6ème Année, constituant une première étape dans la spécialisation scientifique, la classe de terminale constitue une étape fondamentale à l'élève pour pouvoir tester ses aptitudes scientifiques. Celles-ci seront jugées par la capacité de l'élève à l'assimilation du cours et à la résolution d'exercices d'assez haut niveau.

C'est dans ce but que cet ouvrage a été conçu permettant alors au lecteur de travailler régulièrement et de tester l'acquisition de ses connaissances tout au long de l'année.

Ce livre a été divisé en quatres parties.

La première partie fait l'objet d'un résumé de cours permettant à l'élève de se mémoriser les notions nécessaires à la résolution des exercices proposés.

La deuxième partie comporte les énoncés d'exercices, de problèmes ainsi que des sujets de Bac qui ont été regroupés par thème, suivant l'ordre du programme. Chaque énoncé est suivi de résultats numériques, permettant de contrôler immédiatement la résolution de la question en cours.

Dans la troisième partie figurent les corrigés détaillés qui permettent de comparer les solutions trouvées à celles proposées. Les résultats numériques sont souvent exprimés avec trois chiffres significatifs ; le lecteur ne s'étonnera pas de voir fluctuer le 3ème chiffre suivant qu'il utilise les données initiales ou les résultats intermédiaires.

La quatrième partie est une partie annexe ; elle comporte quatre fiches techniques. L'élève y trouvera certaines connaissances de base et un savoir faire servant d'outils de travail.

Pour résoudre les exercices et les problèmes proposés, il est conseillé :

- De bien maîtriser les notions essentielles du cours.
- De bien lire l'énoncé de l'exercice ou le problème et de le traduire sous forme de schéma en y portant toutes les données littérales et numériques.
- De mettre en évidence la réponse demandée.
- D'essayer de résoudre en ne se rapportant à la partie solution que si l'on rencontre des difficultés insurmontables.

Les auteurs accueilleront, avec le plus grand intérêt, les remarques et les suggestions qui permettraient d'améliorer cet ouvrage. Il remercient tous ceux qui les ont aider pour son élaboration et espèrent que ce livre contribuera à la réussite des candidats au baccalauréat.

LES AUTEURS

SOMMAIRE

PARTIE RÉSUMÉ DE COURS 7

PARTIE ÉNONCÉS

Cinétique Chimique 25
Equilibres Chimiques 33
Energie Mécanique 40
Oscillateurs Mécaniques 48
Oscillateurs Electriques 61

PARTIE SOLUTIONS

Cinétique Chimique 81
Equilibres Chimiques 92
Energie Mécanique 105
Oscillateurs Mécaniques 119
Oscillateurs Electriques 142

ANNEXE

Fiches Savoir-faire 168

RESUME DE COURS

NB: * Tous les repères espace choisis dans la partie mécanique (Energie et oscillateurs) sont des repères terrestres considérés comme Galiléens.

* On prendra la valeur de l'accélération de la pesanteur $\|\vec{g}\|$ égale à 10 $m.s^{-2}$ dans toutes applications numériques.

I/ Définitions :

Soit une réaction chimique d'équation :

$$\alpha A + \beta B \longrightarrow \gamma C + \delta D$$

1) Vitesse moyenne :

- Les vitesses moyennes de formation des produits C et D sont définies respectivement par :

$$v_{m_C} = \frac{\Delta n_C}{\Delta t} \quad ; \quad v_{m_D} = \frac{\Delta n_D}{\Delta t}$$

- Les vitesses moyennes de disparition des réactifs A et B sont définies respectivement par :

$$v_{m_A} = -\frac{\Delta n_A}{\Delta t} \quad ; \quad v_{m_B} = -\frac{\Delta n_B}{\Delta t}$$

2) Vitesse instantanée :

- Les vitesses instantanées de formation des produits C et D sont définies respectivement par :

$$v_C(t) = \frac{dn_C(t)}{dt} \quad ; \quad v_D(t) = \frac{dn_D(t)}{dt}$$

- Les vitesses instantanées de disparition des réactifs A et B sont définies respectivement par :

$$v_A(t) = -\frac{dn_A(t)}{dt} \quad ; \quad v_B(t) = -\frac{dn_B(t)}{dt}$$

$n_A(t)$, $n_B(t)$, $n_C(t)$, et $n_D(t)$ étant respectivement les quantités de matière des différents corps A, B, C, et D présents à l'instant de date t dans le mélange réactionnel.

♦ Unité : Les vitesses moyennes et instantanées s'expriment en (mol. s^{-1}) ou en (mol.(unité de temps)$^{-1}$).

NB : Autre forme de définition : Pour un milieu réactionnel homogène, de volume V constant, on peut définir les vitesses à partir des molarités ; ainsi par exemple :

$$v_C = \frac{d[C]}{dt} \quad \text{et} \quad v_A = -\frac{d[A]}{dt}$$

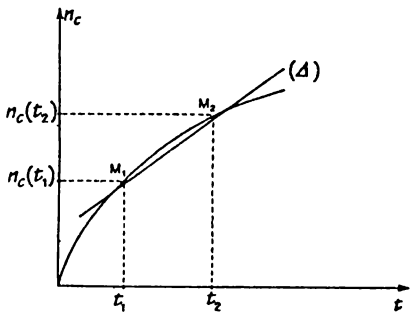
Ces vitesse s'expriment alors en (mol.L^{-1} s^{-1}) ou en (mol.L^{-1}.(unité de temps)$^{-1}$)

♦ Les vitesses de formation des produits et les vitesses de disparition des réactifs d'une réaction chimique donnée sont liées entre elles par les coefficients stoechiométriques :

$$\frac{1}{\alpha}v_A = \frac{1}{\beta}v_B = \frac{1}{\gamma}v_C = \frac{1}{\delta}v_D$$

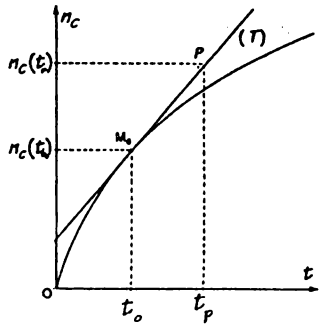
♦ En posant $v = \frac{1}{\alpha}v_A = \frac{1}{\beta}v_B = \frac{1}{\gamma}v_C = \frac{1}{\delta}v_D$; v est appelée vitesse de la réaction chimique.

II/ Détermination graphique d'une vitesse :



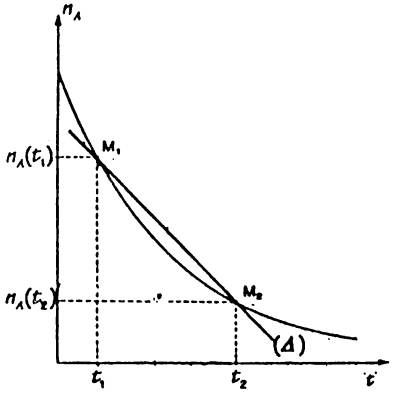
$$v_{m_C} = \frac{\Delta n_C}{\Delta t} = \frac{n_C(t_2) - n_C(t_1)}{t_2 - t_1}$$

C'est le coefficient directeur de (Δ).



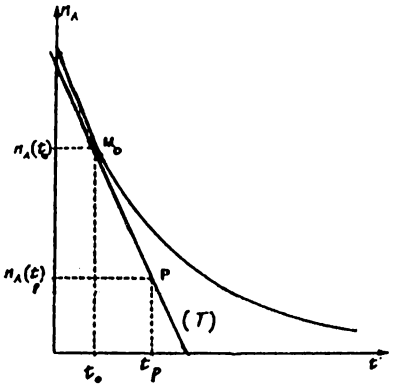
$$v_C(t_o) = \left(\frac{dn_C}{dt}\right)_{t=t_o} = \frac{n_C(t_P) - n_C(t_o)}{t_P - t_o}$$

C'est le coefficient directeur de (T).



$$v_{m_A} = -\frac{\Delta n_A}{\Delta t} = -\left(\frac{n_A(t_2) - n_A(t_1)}{t_2 - t_1}\right)$$

C'est l'opposé du coefficient directeur de (Δ).



$$v_A(t_o) = -\left(\frac{dn_A}{dt}\right)_{t=t_o} = -\frac{n_A(t_P) - n_A(t_o)}{t_P - t_o}$$

C'est l'opposé du coefficient directeur de (T).

III/ Les facteurs cinétiques :

Ce sont tous les facteurs influant sur la vitesse d'une réaction chimique. Les principaux facteurs sont :

• Concentration des réactifs : La vitesse d'une réaction augmente quand on augmente la concentration des réactifs et inversement.

• Température : La vitesse d'une réaction croit, en général, avec la température.

• Catalyseur : Un catalyseur est une entité chimique qui augmente la vitesse d'une réaction chimique sans être consommée par celle-ci ; il ne pourra donc apparaître dans son équation bilan.

I/ Notion d'équilibre chimique dynamique :

1) Réversibilité des réactions d'estérification et d'hydrolyse :

Les réactions d'estérification et d'hydrolyse sont inverses l'une de l'autre. De plus ces réactions peuvent se produire simultanément et dans les mêmes conditions ; elles se limitent donc mutuellement. On dit qu'elles sont réversibles.
L'équation générale de la réaction s'écrit sous la forme :

$$\text{Alcool} + \text{Acide} \underset{2}{\overset{1}{\rightleftharpoons}} \text{Ester} + \text{eau}$$

(1) : Estérification
(2) : Hydrolyse

2) Caractéristiques cinétique et énergétique :

- Les réactions d'estérification et d'hydrolyse sont athermiques.
- Les réactions d'estérification et d'hydrolyse sont lentes. On peut les accélérer par une élévation de température ou l'emploi d'un catalyseur (ions H^+).

3) Equilibre dynamique d'estérification ou d'hydrolyse :

Définition : C'est l'état pour lequel la composition du mélange réactionnel (quantité de matière de chaque constituant : alcool, acide, ester et eau) ne varie pas au cours du temps, mais les deux réactions continuent à se produire :
il apparaît donc, par unité de temps, autant d'ester et d'eau par estérification qu'il en disparaît par hydrolyse.
Cinétiquement, les vitesses réelles des réactions d'estérification et d'hydrolyse sont égales.

II/ Caractérisation d'un état d'équilibre - Loi d'action de masse :

1) Fonction Π des concentrations :

Soit la réaction chimique réversible, d'équation :

$$\alpha A + \beta B \rightleftharpoons \gamma C + \delta D$$

La fonction Π des concentrations relative à cette réaction est définie par :

$$\Pi = \frac{[C]^{\gamma}\,[D]^{\delta}}{[A]^{\alpha}\,[B]^{\beta}}$$

2) Constante d'équilibre K d'une réaction chimique :

A l'équilibre dynamique : $\Pi_{éq} = K = \dfrac{[C]_{éq}^{\gamma}\,[D]_{éq}^{\delta}}{[A]_{éq}^{\alpha}\,[B]_{éq}^{\beta}} = C^{te}$.

Par définition, K est appelée constante d'équilibre de la réaction.
La relation $\Pi_{éq} = K$ traduit la loi d'action de masse.

Remarques importantes:

1- Pour une réaction réversible donnée, sa constante d'équilibre ne dépend que de la température.

2- A une température donnée, la composition finale à l'équilibre d'un système chimique change si on change sa composition initiale, mais la constante d'équilibre K reste inchangée. Celle-ci est donc une caractéristique de l'état d'équilibre dynamique.

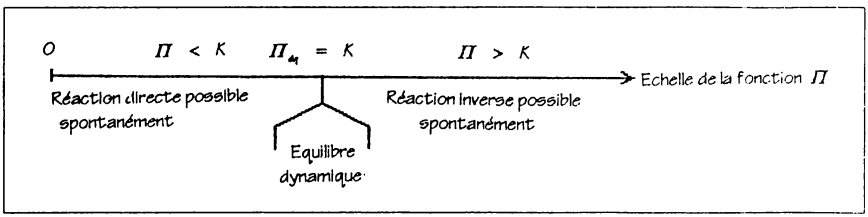
3- Par convention, pour un solide pur ou un solvant d'une solution diluée, leurs concentrations restent toujours constantes, elles n'interviennent donc pas dans les expressions de K ou de Π.

4- La constante d'équilibre K' relative à la réaction :

$$\gamma C + \delta D \rightleftharpoons \alpha A + \beta B$$

est définie par : $$K' = \frac{[A]_{éq}^{\alpha}\,[B]_{éq}^{\beta}}{[C]_{éq}^{\gamma}\,[D]_{éq}^{\delta}} = \frac{1}{K}$$

III/ Condition d'évolution spontanée d'un système chimique :



IV/ Exemple d'équilibre chimique :

Dissolution et précipitation des électrolytes peu solubles - Produit de solubilité :

Un électrolyte est peu soluble dans l'eau car sa dissolution est nettement limitée par sa réaction inverse : la réaction de précipitation.

Par exemple pour le Chlorure de Plomb ($PbCl_2$), l'équation de dissolution accompagnée d'une dissociation ionique peut s'écrire :

$$PbCl_{2(sd)} \underset{2}{\overset{1}{\rightleftharpoons}} Pb^{2+} + 2\,Cl^-$$

(1) : Dissolution

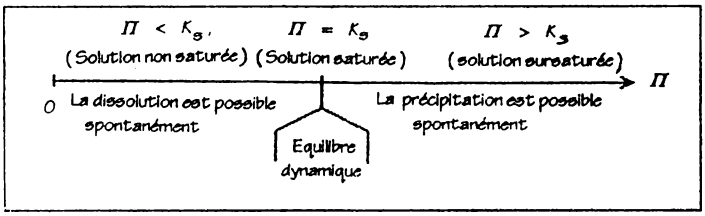
(2) : Précipitation

Ces deux réactions conduisent à un état d'équilibre dynamique qui n'est autre que l'état de saturation.

A l'équilibre dynamique, la loi d'action de masse s'écrit : $K_s = [Pb^{2+}]_{eq}\,[Cl^-]_{eq}^2$.

Soit s : la solubilité de l'électrolyte (concentration de la solution saturée à une température donnée), on a : $[Pb^{2+}]_{éq} = s$ et $[Cl^-]_{éq} = 2s$; d'où : $K_s = 4s^3$,

K_s est appelée produit de solubilité de l'électrolyte (et ne dépend que de la température).



V/ Loi de modération (ou loi de déplacement d'équilibre) :

1) Les facteurs d'équilibre :

Les facteurs d'équilibre sont les grandeurs provoquant la perturbation d'un état d'équilibre dynamique donné.

Ces facteurs sont : - Molarité d'un constituant du système chimique.
- La température du système.
- La pression d'un système en phase gazeuse.

2) Enoncé de la loi de modération :

Pour un système chimique initialement en état d'équilibre dynamique, toute perturbation de cet équilibre par l'un des facteurs d'équilibre, entraîne l'évolution du système vers un nouvel état d'équilibre (on dit alors qu'il y a déplacement d'équilibre) dans le sens de la réaction tendant à modérer la modification apportée.

a) Loi de modération relative à la molarité :

A température et pression constantes, une augmentation de la concentration de l'un des constituants d'un système en équilibre dynamique, déplace cet équilibre dans le sens qui correspond à la diminution de la concentration de ce constituant (et inversement).

b) Loi de modération relative à la température (ou loi de Vant'Hoff) :

Pour un système chimique fermé* en équilibre dynamique et à pression constante :
- Une augmentation de température favorise la réaction endothermique.
- Une diminution de température favorise la réaction exothermique.

Remarque : Dans le cas d'une réaction réversible athermique, la température n'est pas un facteur d'équilibre. Exemple : Equilibre d'estérification et d'hydrolyse.

c) Loi de modération relative à la pression (ou loi de Le Châtelier) :

Pour un système chimique fermé en phase gazeuse, initialement en équilibre dynamique, une augmentation de la pression, à température constante, favorise la réaction qui diminue le nombre de mole total de gaz et inversement.

* Un système fermé est un système qui n'échange pas de la matière avec l'extérieur.

I/ Travail d'une force :

1) Travail élémentaire d'une force :

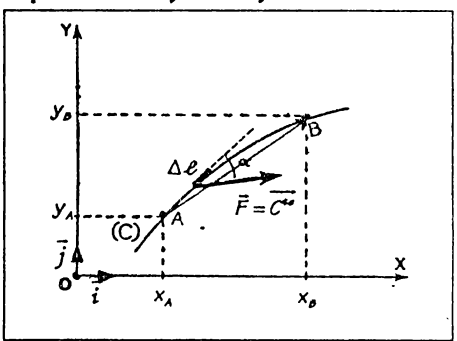
Le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ dont le point d'application effectue un déplacement élémentaire $\overrightarrow{\delta l}$ est défini par : $\boxed{\delta W_{\vec{F}} = \vec{F}.\overrightarrow{\delta l}}$

2) Travail d'une force au cours d'un déplacement quelconque :

a) Travail d'une force constant :

Le travail d'une force constante $\vec{F}$ au cours d'un déplacement quelconque de son point d'application de A vers B est donné par :

$$\boxed{W_{\vec{F}_{A\to B}} = \vec{F}.\overrightarrow{AB}}$$



♦ Expression algébrique : $\boxed{W_{\vec{F}_{A\to B}} = \left\|\vec{F}\right\|\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cos(\vec{F},\overrightarrow{AB})}$;

$\left\|\vec{F}\right\|$ en N

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ en m

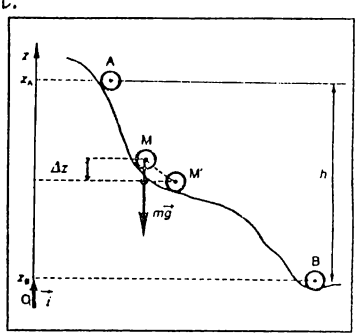
W en J

♦ Expression analytique : $\boxed{W_{\vec{F}_{A\to B}} = F_x(x_B - x_A) + F_y(y_B - y_A)}$

Remarque : Le travail d'une force est une grandeur algébrique :

- $W_{\vec{F}_{A\to B}} > 0$: Le travail de $\vec{F}$ est dit moteur.
- $W_{\vec{F}_{A\to B}} < 0$: Le travail de $\vec{F}$ est dit résistant.
- $W_{\vec{F}_{A\to B}} = 0$: $\vec{F}$ ne travaille pas ($\vec{F} \perp \overrightarrow{AB}$).

Exemple : Travail du poids d'un solide de masse m le long d'un déplacement $A \longrightarrow B$ quelconque :



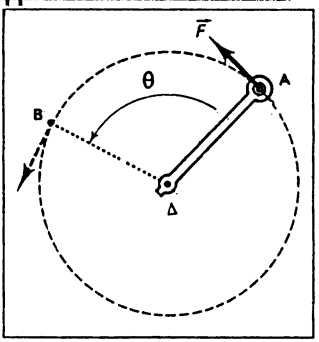
$$W_{\vec{P}_{A\to B}} = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = P_z(z_B - z_A)$$

$$= -m\left\|\vec{g}\right\|(z_B - z_A);\ z_B - z_A = -h\ ,$$

soit : $W_{\vec{P}_{A\to B}} = m\left\|\vec{g}\right\|h$: Travail moteur.

$W_{\vec{P}_{B\to A}} = P_z(z_A - z_B) = -m\left\|\vec{g}\right\|h$: Travail résistant.

b) Travail d'une force de moment constant par rapport à un axe de rotation (Δ) fixe :



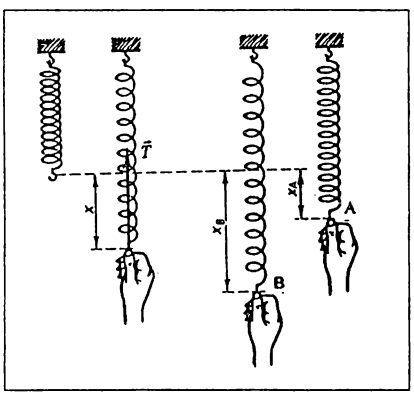
Pour un déplacement circulaire du point d'application de $\vec{F}$ de A vers B, le travail de $\vec{F}$ s'écrit :

$$W_{\vec{F}_{A\to B}} = M_{\vec{F}/\Delta} \cdot (\theta_B - \theta_A) = M_{\vec{F}/\Delta} \cdot \theta$$

$\begin{cases} W & \text{en J} \\ M_{\vec{F}/\Delta} & \text{en N.m} \\ \theta & \text{en rad} \end{cases}$

3) Travail d'une force d'intensité variable

Exemple : Tension d'un ressort



On montre, à partir de la somme des travaux élémentaires, que le travail total de $\vec{T}$ correspondant au déplacement de A vers B s'écrit :

$$W_{\vec{T}_{A\to B}} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

$\begin{cases} W & \text{en J} \\ k & \text{en N.m}^{-1} \\ x & \text{en m} \end{cases}$

4) Force conservative - Force dissipative (ou non conservative) :

♦ Lorsque le travail d'une force dont le point d'application se déplace d'un point A vers un point B, est le même quelque soit le chemin suivi entre A et B, la force est dite conservative .

Exemples : $\vec{P}$: poids d'un solide ; $\vec{T}$: tension d'un ressort.

♦Dans le cas où le travail de $\vec{F}$ dépend du chemin suivi, la force est dite dissipative. **Exemple :** Les forces de frottement.

II/ Energie cinétique :

1) Définition : C'est l'énergie que possède tout système en mouvement.

2) Expression :

a) Pour un solide de masse M en translation de vitesse $\vec{v}$:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}Mv^2} \; ; \quad \begin{cases} E_c & \text{en J} \\ M & \text{en Kg} \\ v & \text{en m.s}^{-1} \end{cases}$$

b) Pour un solide de moment d'inertie J_Δ par rapport à un axe (Δ) fixe et en rotation à la vitesse angulaire θ' autour de celui-ci :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}J_\Delta \theta'^2} \; ; \quad \begin{cases} E_c & \text{en J} \\ J_\Delta & \text{en Kg.m}^2 \\ \theta' & \text{en rad.s}^{-1} \end{cases}$$

3) Théorème de la variation de l'énergie cinétique :

Enoncé : La variation de l'énergie cinétique d'un système entre deux instants de dates t_1 et t_2 est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces extérieures et intérieures agissant sur ce système entre ces deux mêmes instants :

$$\boxed{\Delta E_c \Big\}_{t_1}^{t_2} = \sum W_{\vec{F}_{ext}} \Big\}_{t_1}^{t_2} + \sum W_{\vec{F}_{int}} \Big\}_{t_1}^{t_2}}$$

Remarque : Pour un système indéformable (solide), $\sum W_{\vec{F}_{int}}$ est toujours nulle.

III/ Energie potentielle :

1) Energie potentielle de pesanteur :

L'énergie potentielle de pesanteur d'un système : solide - terre est définie par :

$$\boxed{E_{pp}(z) = -mgz + E_{ppo}}$$

m : Masse du solide, en Kg

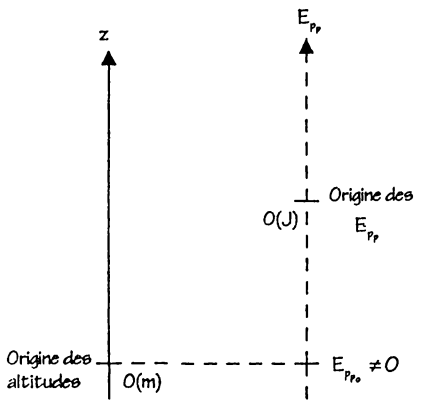
g : Valeur algébrique de l'accélération de la pesanteur, en m.s^{-2}

z : Altitude du solide (abscisse du centre d'inertie du solide selon un axe vertical) par rapport à une origine d'altitude O choisie. Cette altitude s'exprime en m.

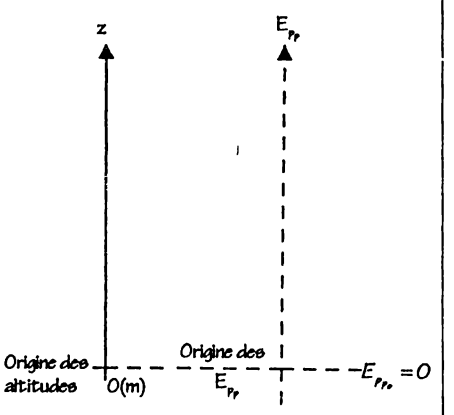
$E_{pp_o} = E_{pp}(z=O)$: Energie potentielle de pesanteur à l'origine des altitudes.

Remarques Importantes :

Remarque (1) :



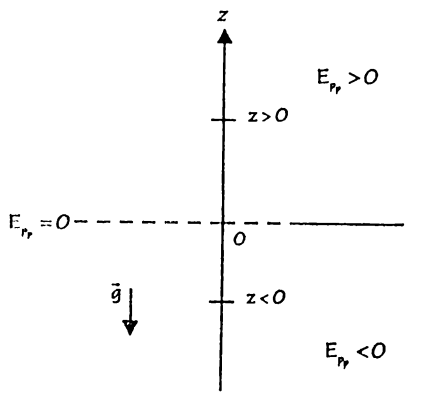
$$E_{pp}(z) = -mgz + E_{pp_o}$$



$$E_{pp}(z) = -mgz$$

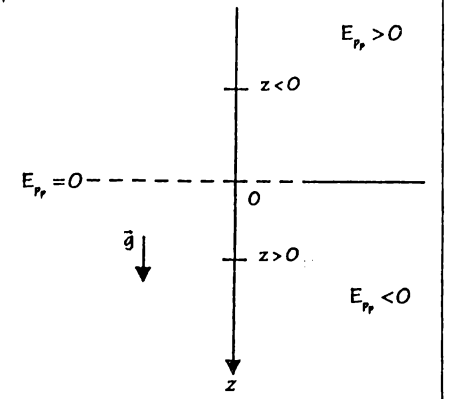
Remarque (2) :

Si l'axe des altitudes z'z est orienté positivement dans le sens ascendant.



$$g = -\|\vec{g}\| \Rightarrow E_{pp}(z) = m\|\vec{g}\|z$$

Si l'axe des altitudes z'z est orienté positivement dans le sens descendant.



$$g = +\|\vec{g}\| \Rightarrow E_{pp}(z) = -m\|\vec{g}\|z$$

Le signe de E_{pp} ne dépend pas de l'orientation de l'axe des altitudes z'z choisi.

2) Energie potentielle élastique :

L'énergie potentielle élastique emmagasinée dans un ressort de constante de raideur k, dont la déformation est Δl, est définie par : $E_{p_e} = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 + E_{p_{e_0}}$

Conventionnellement, $E_{p_e} = 0$ lorsque le ressort n'est pas déformé $(\Delta l = 0)$, donc $E_{p_{e_0}} = 0$. L'énergie E_{p_e} s'exprime simplement sous la forme :

$$\boxed{E_{p_e} = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2} ; \quad \begin{cases} E_{p_e} & \text{en J} \\ k & \text{en N.m}^{-1} \\ \Delta l & \text{en m} \end{cases}$$

Attention : Ne pas confondre Δl et x : abscisse du solide lié au ressort.

3) Théorème de la variation de l'énergie potentielle :

Enoncé : La variation de l'énergie potentielle d'un système déformable entre deux instants de dates t_1 et t_2 données, est égale à l'opposé de la somme algébrique des travaux de toutes les forces intérieures conservatives agissant sur ce système entre ces deux instants.

$$\boxed{\Delta E_p \Big]_{t_1}^{t_2} = - \sum W_{\vec{F}_{int.cons.}} \Big]_{t_1}^{t_2}}$$

IV/ Energie mécanique :

1) Définition :

L'énergie mécanique d'un système est définie par : $\boxed{E = E_c + E_p}$ où E_c et E_p sont respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de ce système.

2) Théorème de la variation de l'énergie mécanique :

$$\boxed{\Delta E \Big]_{t_1}^{t_2} = \Delta E_c \Big]_{t_1}^{t_2} + \Delta E_p \Big]_{t_1}^{t_2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta E \Big]_{t_1}^{t_2} = \sum W_{\vec{F}_{ext}} \Big]_{t_1}^{t_2} + \sum W_{\vec{F}_{int.damp.}} \Big]_{t_1}^{t_2}}$$

La variation de l'énergie mécanique d'un système matériel entre deux instants de dates t_1 et t_2 est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures et des forces intérieures dissipatives qui agissent sur le système entre ces deux instants.

Cas particulier important : Si $\sum W_{\vec{F}_{ext}} \Big]_{t_1}^{t_2} + \sum W_{\vec{F}_{int.damp.}} \Big]_{t_1}^{t_2} = 0$

alors $\Delta E \Big]_{t_1}^{t_2} = 0$ donc : $E = C^{te}$: Le système est dit conservatif.

Conséquence : Transformation mutuelle des formes d'énergie mécanique :

$$\boxed{\Delta E_c = - \Delta E_p}$$

I/ Définition :

♦ Un oscillateur est un système physique susceptible d'être le siège d'un phénomène périodique autour de son état d'équilibre stable. Ce phénomène périodique est appelé oscillation.

♦ L'oscillateur est dit harmonique, si ses oscillations sont décrites par une grandeur physique $y(t)$ qui est une fonction sinusoïdale du temps : y est dite grandeur oscillante.

♦ Pour osciller, un oscillateur doit recevoir de l'énergie du milieu extérieur :

- Si cette énergie n'est fournie qu'une seule fois, les oscillations sont dites libres.

Si de plus, l'oscillateur est un système conservatif (son énergie reste constante), alors les oscillations sont non amorties.

Si par contre, l'oscillateur est un système non conservatif, l'énergie dissipée entraîne l'amortissement des oscillations.

- Si l'énergie est fournie à l'oscillateur régulièrement au cours du temps, les oscillations sont dites forcées.

Si de plus cette énergie est délivrée périodiquement d'une façon sinusoïdale, les oscillations sont dites en régime sinusoïdal forcées.

Le milieu extérieur joue le rôle d'excitateur. L'oscillateur joue le rôle de résonateur.

II/ Oscillations Libres :

1) Equation différentielle :

La grandeur y vérifie : $\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + c\,y = 0}$

(b et c sont des constantes positives)

2) Solution générale de l'équation différentielle :

a) Cas où $b = 0$: $\quad y(t) = y_m \sin(\omega_o t + \varphi) \quad$ avec $\quad \omega_o = \sqrt{c}$

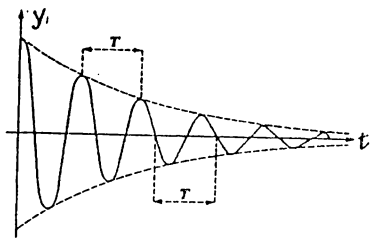
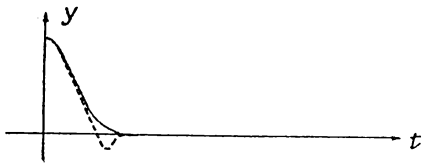
ω_o : Pulsation propre de l'oscillateur

y_m : Amplitude des oscillations

φ : Phase à $t = 0$, ou phase initiale.

L'oscillateur harmonique est dit alors non amorti.

b) Cas où $b \neq 0$: La forme mathématique de la solution générale est hors programme. Cependant, on montre que, selon l'importance du coefficient b, cette solution correspond à l'un des trois régimes d'oscillations suivants :

Régime Pseudo-périodique (b faible) $b < 2\sqrt{c}$	
Régime Apériodique Critique $b = 2c$	
Régime Apériodique (b élevé) $b > 2\sqrt{c}$	

III/ Oscillations forcées en régime sinusoïdal :

1) Equation différentielle :

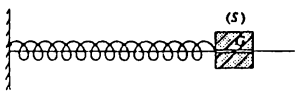
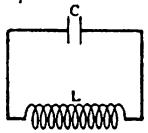
La grandeur y vérifie : $\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = a\sin(\omega_e t + \varphi_e)}$

Le second membre : $a\sin(\omega_e t + \varphi_e)$ est la grandeur décrivant l'excitation sinusoïdale avec la pulsation ω_e.

2) Solution générale de l'équation différentielle :

$$\boxed{y(t) = y_m \sin(\omega_e t + \varphi_y) \quad \text{avec :} \quad y_m = f(\omega_e) \quad \text{et} \quad \varphi_y = g(\omega_e)}$$

IV/ Etude comparative d'un oscillateur mécanique et d'un oscillateur électrique - Analogie électromécanique :

	OSCILLATEUR MECANIQUE	OSCILLATEUR ELECTRIQUE
Exemple	Pendule élastique Système : Ressort, Solide 	Circuit (L, C) Système : Condensateur, Bobine purement inductive 
Grandeurs Caractéristiques de l'oscillateur	m : Masse du solide (S) k : Constante de raideur du ressort	L : Inductance de la bobine $\frac{1}{C}$; C : Capacité du condensateur
Terme d'amortissement	h: Coefficient de frottement visqueux	R : Résistance du circuit
OSCILLATIONS LIBRES NON AMORTIES		
Grandeurs Oscillantes	x: Elongation (ou abscisse) de (G_S) $v = \frac{dx}{dt}$: vitesse de (S)	q: Charge électrique du condensateur $i = \frac{dq}{dt}$: Intensité du courant dans le circuit
Equation différentielle des oscillations	$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$	$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$
Pulsation et période propres des oscillations	$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $T_o = 2\pi\sqrt{LC}$
Equation horaire des oscillations	$x(t) = X_m \sin(\omega_o t + \varphi)$	$q(t) = Q_m \sin(\omega_o t + \varphi)$

Energie à l'instant t	$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ $E = C^{te} = \frac{1}{2}kX_m^2 = \frac{1}{2}mV_m^2$	$E = E_m + E_e = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ $E = C^{te} = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2}LI_m^2$
OSCILLATIONS LIBRES AMORTIES		
Equation Différentielle	$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = 0$	$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$
Variation d'énergie de l'oscillateur	$\frac{dE}{dt} = -hv^2 < 0$ X_m : fonction décroissante du temps	$\frac{dE}{dt} = -Ri^2 < 0$ Q_m : fonction décroissante du temps
OSCILLATIONS FORCEES		
Grandeur Excitatrice	Force excitatrice : $F(t) = F_m \sin(\omega_e t + \varphi_F)$	Tension d'alimentation : $u(t) = U_m \sin(\omega_e t + \varphi_u)$
Equation différentielle	$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = F$ **ou** $m\frac{dv}{dt} + hv + k\int v\,dt = F$	$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = u$ **ou** $L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = u$
Solution générale de l'équation différentielle	$x(t) = X_m \sin(\omega_e t + \varphi_x)$ avec : $\begin{cases} X_m = \dfrac{F_m}{\omega_e\sqrt{h^2 + \left(m\omega_e - \dfrac{k}{\omega_e}\right)^2}} \\ tg(\varphi_F - \varphi_x) = \dfrac{h}{m\omega_e - \dfrac{k}{\omega_e}} = \dfrac{h\omega_e}{m(\omega_e^2 - \omega_o^2)} \end{cases}$ **ou** $v(t) = V_m \sin(\omega_e t + \varphi_v)$ avec : $\begin{cases} V_m = \omega_e X_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{h^2 + \left(m\omega_e - \dfrac{k}{\omega_e}\right)^2}} \\ tg(\varphi_F - \varphi_v) = \dfrac{m\omega_e - \dfrac{k}{\omega_e}}{h} \end{cases}$	$q(t) = Q_m \sin(\omega_e t + \varphi_q)$ avec : $\begin{cases} Q_m = \dfrac{U_m}{\omega_e\sqrt{R^2 + \left(L\omega_e - \dfrac{1}{C\omega_e}\right)^2}} \\ tg(\varphi_u - \varphi_q) = \dfrac{R}{L\omega_e - \dfrac{1}{C\omega_e}} = \dfrac{R\omega_e}{L(\omega_e^2 - \omega_o^2)} \end{cases}$ **ou** $i(t) = I_m \sin(\omega_e t + \varphi_i)$ avec : $\begin{cases} I_m = \omega_e Q_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_e - \dfrac{1}{C\omega_e}\right)^2}} \\ tg(\varphi_u - \varphi_i) = \dfrac{L\omega_e - \dfrac{1}{C\omega_e}}{R} \end{cases}$

Impédance	$Z_{méca} = \frac{F_m}{V_m}$ $= \sqrt{h^2 + \left(m\omega_e - \frac{k}{\omega_e}\right)^2}$	$Z_{élec} = \frac{U_m}{I_m}$ $= \sqrt{R^2 + \left(L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e}\right)^2}$
Puissance moyenne	$P = \frac{1}{2}F_m V_m \cos(\varphi_F - \varphi_v)$ $= \frac{1}{2}hV_m^2$ avec $\cos(\varphi_F - \varphi_v)$ le facteur de puissance mécanique	$P = \frac{1}{2}U_m I_m \cos(\varphi_u - \varphi_i)$ $= \frac{1}{2}RI_m^2$ avec $\cos(\varphi_u - \varphi_i)$ le facteur de puissance électrique
Résonance	Résonance d'élongation : X_m est maximale pour $\omega_e = \omega_r$ telle que : $\omega_r = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{h^2}{2m^2}} < \omega_o$ Résonance de vitesse (ou de Puissance) : V_m est maximale pour $\omega_e = \omega_r$ telle que : $\omega_r = \omega_o$ Conséquence : $Z_{méca} = h$ **et** $\varphi_F = \varphi_v$ Facteur de qualité : $Q = \frac{m\omega_o}{h} = \frac{k}{h\omega_o}$	Résonance de charge : Q_m est maximale pour $\omega_e = \omega_r$ telle que : $\omega_r = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{R^2}{2L^2}} < \omega_o$ Résonance d'intensité (ou de puissance) : I_m est maximale pour $\omega_e = \omega_r$ telle que : $\omega_r = \omega_o$ Conséquence : $Z_{élec} = R$ **et** $\varphi_u = \varphi_i$ Facteur de qualité : $Q = \frac{L\omega_o}{R} = \frac{1}{RC\omega_o}$

PARTIE ENONCES

Exercice n°1 :

On mélange dans un bécher, 100 cm^3 d'une solution aqueuse d'iodure de potassium KI de concentration molaire 0,400 $mol.L^{-1}$ et 100 cm^3 d'une solution aqueuse de péroxodisulfate de potassium $K_2S_2O_8$ de concentration molaire 0,036 $mol.L^{-1}$.

Durant toute la réaction, la température et le volume du milieu réactionnel restent constants.

Le mélange, initialement incolore, devient jaunâtre par suite de l'apparition progressive du diiode I_2.

1°)a) Quels sont les couples rédox mis en jeu ?

b) Ecrire l'équation bilan de la réaction qui se produit.

2°) On effectue, à différentes dates t comptées à partir du moment où on a réalisé le mélange, des prélèvements du milieu réactionnel. On dose le diiode formé après avoir versé dans chaque prélèvement de l'eau glacée. Les résultats du dosage sont consignés dans le tableau suivant :

t (min)	3	5	9	12	16	20	30	40	65	80
$[I_2](10^{-2}mol.L^{-1})$	0,28	0,43	0,68	0,82	1,01	1,14	1,37	1,52	1,66	1,69

Tracer la courbe $[I_2] = f(t)$.

Echelle : 1 cm pour 5 min en abscisse

1 cm pour 10^{-3} $mol.L^{-1}$ en ordonnée.

3°)a) Définir la vitesse instantanée v de formation du diiode.

b) Déterminer graphiquement la valeur de la vitesse v aux dates :

$t_1 = 20$ min et $t_2 = 65$min.

c) Préciser comment évolue la vitesse v au cours du temps et donner une explication à cette évolution.

4°)a) Déterminer la quantité de matière de diiode susceptible d'être formée si la réaction était totale.

b) Déduire, graphiquement, la date t_o à laquelle le mélange contient la moitié de cette quantité.

Rép. Num.: (Bac)

3°) b) $v_1 = 2,7.10^{-4}$ $mol.L^{-1}.min^{-1}$, $v_2 = 3,06.10^{-5}$ $mol.L^{-1}.min^{-1}$.

4°) a) $n_{I_2})_{formé} = 3,6.10^{-3}$ mol ; b) $t_o \approx 13,5$ min.

Exercice n°2 :

PARTIE A/

L'eau oxygénée H_2O_2 peut oxyder lentement les ions iodures I^- en milieu acide.

Les couples rédox mis en jeu sont (H_2O_2 / H_2O) et (I_2 / I^-).

1°) Ecrire les deux demi-équations relatives à l'oxydation de I^- et à la réduction de H_2O_2.

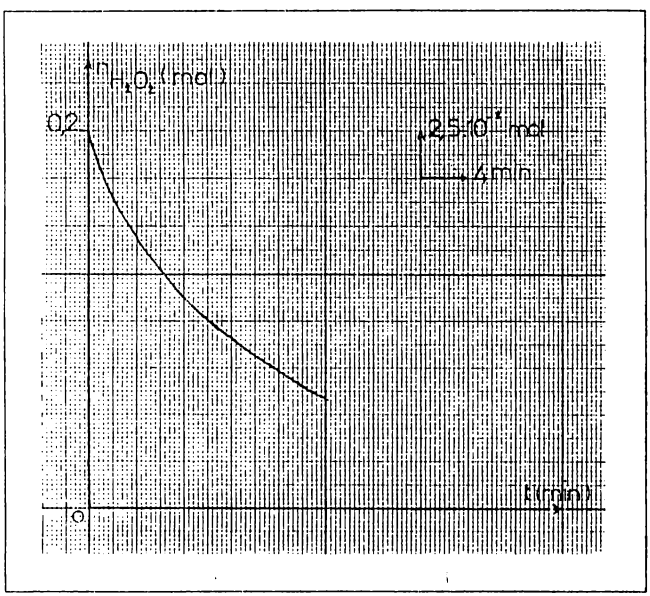
Montrer que l'équation bilan de la réaction d'oxydo-réduction s'écrit :

$$H_2O_2 + 2I^- + 2H^+ \longrightarrow 2H_2O + I_2$$

2°) La quantité de diiode formé à un instant t peut être déterminer à l'aide d'un dosage ; en effet I_2 peut être réduit par l'ion thiosulfate $S_2O_3^{2-}$ pour régénérer de nouveau I^-. Les couples rédox mis en jeu sont : $(S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-})$ et (I_2/I^-).
Etablir l'équation bilan de la réaction rédox en passant par les deux demi-équations relatives à l'oxydation et à la réduction.

PARTIE B/

On prépare un mélange réactionnel comprenant : de l'acide sulfurique, de l'iodure de potassium en excès et n_o = 0,2 mol d'eau oxygénée. A l'aide du dosage de la quantité de diiode formée à différents instants t par une solution de thiosulfate de potassium $K_2S_2O_3$ de molarité 2,5 M, il a été possible de tracer la courbe représentant les variations du nombre de mole de H_2O_2 restant en fonction du temps.



Déduire de la courbe :

1°) La vitesse moyenne de disparition de H_2O_2 entre les instants de dates $t = 0$ et $t_1 = 8$ min.

2°) La vitesse instantanée (en mol.min^{-1}) de disparition de H_2O_2 à l'instant de date t_1 ; en déduire la vitesse instantanée de disparition de l'ion iodure I^- au même instant.

3°) Le volume de la solution de thiosulfate de potassium 2,5 M nécessaire pour doser la quantité de diiode formé à cet instant de date t_1.

Rép. Num.:

B/ 1°) $v_{moy} = 1{,}09.10^{-2}\,mol.min^{-1}$.

2°) $v_{H_2O_2} = 6{,}4.10^{-3}\,mol.min^{-1}$; $v_t = 12{,}8.10^{-3}\,mol.min^{-1}$.

3°) $V_{K_2S_2O_3} = 70\ cm^3$.

Exercice n°3 :

Dans tout l'exercice, le volume molaire des gaz est $V_M = 24\ L.mol^{-1}$. On veut étudier, à température constante, la cinétique de la décomposition de l'eau oxygénée.

L'équation-bilan s'écrit : $2H_2O_2 \longrightarrow 2H_2O + O_2^{\uparrow}$

A la date $t = 0$, début de l'expérience, la solution contient 6.10^{-2} mole d'eau oxygénée et son volume est $V_S = 1$ L, volume considéré comme constant au cours de l'expérience.

Pour étudier l'avancement de la réaction, on mesure, à pression constante, le volume de dioxygène V_{O_2} dégagé au cours du temps.

1°) Exprimer, en mol, la quantité de dioxygène, notée n_{O_2}, formée à la date t en fonction de V_{O_2} et V_M.

2°) En déduire, à la même date, la quantité, en moles, d'eau oxygénée disparue, puis la concentration de l'eau oxygénée restante, notée c.

3°) Les résultats de l'expérience sont indiqués dans le tableau suivant :

t (min)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	60
V_{O_2} (L)	0	0,16	0,27	0,36	0,44	0,50	0,54	0,59	0,61	0,68
c ($mol.L^{-1}$)	0,06									

Compléter le tableau et tracer, sur papier millimétré, le graphe représentant les variations de c en fonction du temps.

Echelle : 1cm pour 5min en abscisse.

1cm pour $5.10^{-3} mol.L^{-1}$ en ordonnée.

4°) Définir la vitesse $v(t)$ de disparition de l'eau oxygénée à la date t.

5°) En utilisant la courbe :

- Dire, sans calculs, comment évolue $v(t)$ en fonction du temps ;
- Calculer $v(t)$ en $mol.L^{-1}.s^{-1}$ à la date $t = 30$ min.

Rép. Num. :

5°) $v(t) = 1{,}19.10^{-5}\,mol.L^{-1}.s^{-1}$.

Exercice n°4 :

L'acide chlorhydrique réagit avec le zinc en donnant du dihydrogène et une solution aqueuse de chlorure de zinc :

$$2H_3O^+ + 2Cl^- + Zn \longrightarrow H_2^{\uparrow} + Zn^{2+} + 2Cl^- + 2H_2O$$

1°) A $t = 0$, on introduit une masse $m = 1{,}0$ g de zinc en poudre dans un ballon contenant $V = 40$ mL d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration $c_a = 0{,}50$ mol.L^{-1}. On recueille le gaz dihydrogène formé au cours du temps et on en mesure son volume V_{H_2}.

a) Le volume molaire du gaz lors de l'expérience étant V_M=24 L.mol^{-1}, déterminer la concentration c de la solution en ions Zn^{2+} lorsque le volume $V_{H_2} = 0{,}103$ L.

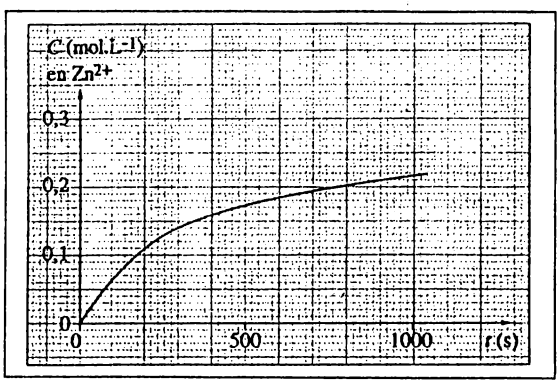
b) Déterminer la concentration c_∞ des ions Zn^{2+} en fin de réaction et calculer la masse m_∞ du zinc restant.

2°) L'ensemble des résultats de cette expérience permet de tracer le graphique représentatif de la concentration des ions Zn^{2+} de la solution en fonction du temps (voir figure).

a) Déterminer la vitesse moyenne de formation des ions Zn^{2+} dans l'intervalle de temps [0 ; 500] s.

b) Déterminer la vitesse instantanée de formation des ions Zn^{2+} à l'instant initial $t = 0$

c) Déterminer graphiquement le temps de demi-réaction.



Masses molaires atomiques en g.mol^{-1} :

M(H) = 1 ; M(O) = 16 ; M(Cl) = 35,5 ; M(Zn) = 65,4.

Rép. Num. :

1°) a) $[Zn^{2+}] = 10{,}73.10^{-2}$ mol.L^{-1} ; b) $c_\infty = 0{,}25$ mol.L^{-1} , $m_\infty = 0{,}346$ g.

2°) a) $v_{m_{Zn^{2+}}} = 3{,}4.10^{-4}$ mol.L^{-1}.s^{-1} ; b) $v_{Zn^{2+}} = 7{,}5.10^{-4}$ mol.L^{-1}.s^{-1} ; c) $t_{1/2} = 250$ s.

Exercice n°5 :

On réalise l'oxydation des ions iodures I^- par l'eau oxygénée en milieu acide en suivant la concentration du diiode formé en fonction du temps dans diverses conditions expérimentales. Dans chaque cas, la concentration initiale des ions iodures $[I^-]_o$ est le double de la concentration initiale $[H_2O_2]_o$ indiquée.

On opère en présence d'un large excès d'ions H^+ dont la concentration pourra être considérée comme constante.

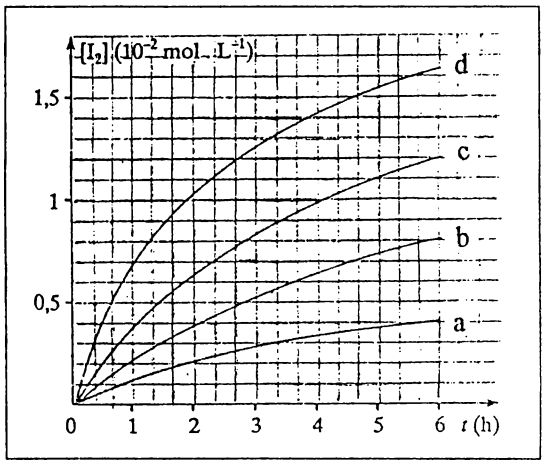
Expérience 1 : $[H_2O_2]_o = 10^{-2}$ mol.L^{-1} ; température $\theta = 20°C$.

Expérience 2 : $[H_2O_2]_o = 2.10^{-2}$ mol.L^{-1} ; température $\theta = 20°C$.

Expérience 3 : $[H_2O_2]_o = 10^{-2}$ mol.L^{-1} ; température $\theta = 32°C$.

Expérience 4 : $[H_2O_2]_o = 2.10^{-2}$ mol.L^{-1} ; température $\theta = 32°C$.

Les résultats obtenus sont représentés par le graphe ci-contre.



1°) Donner l'équation bilan de la réaction étudiée.

2°) Déterminer la concentration du diiode obtenu au bout d'un temps très long $[I_2]_\infty$ dans chacune de ces expériences.

3°) Déterminer graphiquement la vitesse de formation du diiode à l'instant de date $t = 0$ pour chacune de ces expériences.

4°) Relier chaque courbe à l'expérience correspondante en justifiant les attributions effectuées.

Rép. Num. :

3°) $v_a \approx 0{,}128.10^{-2}$ mol.L^{-1}.h^{-1} , $v_b \approx 0{,}25.10^{-2}$ mol.L^{-1}.h^{-1},

$v_c \approx 0{,}48.10^{-2}$ mol.L^{-1}.h^{-1} , $v_d \approx 1{,}05.10^{-2}$ mol.L^{-1}.h^{-1}.

Exercice n°6 :

On étudie la cinétique de la réaction, en solution aqueuse, des ions oxalate $C_2O_4^{2-}$ avec les ions permanganate MnO_4^-. A cet effet, on réalise un mélange, à volumes égaux, de solutions aqueuses de $KMnO_4$ à 0,2 mol.L^{-1} et de $Na_2C_2O_4$ à 0,5mol.L^{-1}, que l'on acidifie par addition de H_2SO_4 et que l'on maintient à une température de 40°C.

Un procédé de mesure physique permet de déterminer, de minute en minute, la molarité de MnO_4^- restant dans le mélange. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$[MnO_4^-](10^{-2}M)$	10,0	9,6	9,3	6,0	3,0	1,2	0,5	0,3	0,2	0,0

1°) Ecrire l'équation-bilan de la réaction d'oxydo-réduction. Reste-t-il des ions $C_2O_4^{2-}$ après 9 min de la réaction ?

2°) Tracer la courbe représentant l'évolution de $[Mn^{2+}]$ en fonction du temps.
Echelle : 1 cm pour 1 min en abscisse
1 cm pour 10^{-2} M en ordonnée.
Que peut-on dire de l'évolution de la vitesse de la réaction au cours du temps ? Comment peut-on l'interpréter ?

Exercice n°7 :

Les ions iodures sont oxydés lentement par l'eau oxygénée, en milieu acide, selon la réaction (1) : $H_2O_2 + 2I^- + 2H^+ \longrightarrow 2H_2O + I_2$

On peut déterminer le temps nécessaire pour qu'il se forme n moles de diiode I_2 en ajoutant à l'avance des quantités fixées de thiosulfate de sodium $Na_2S_2O_3$, qui réagit avec le diiode selon la réaction (2) :

$$I_2 + 2S_2O_3^{2-} \longrightarrow 2I^- + S_4O_6^{2-}$$

On prépare alors une solution contenant :
*) 10 mL de solution d'iodure de potassium à 1 mol.L^{-1};
*) 2 mL de thiosulfate de sodium à 1 mol.L^{-1};
*) Une solution d'acide sulfurique fournissant un large excès d'ions H^+ dont la concentration pourra être considérée comme constante ;
*) Quelques gouttes d'empois d'amidon.
*) On complète ensuite le mélange par l'eau distillée pour avoir un volume total de la solution égal à 200 mL.

A l'instant $t = 0$, on ajoute 1 mL d'eau oxygénée à 9,82 mol.L^{-1}.
A l'instant $t_1 = 86$ s, la coloration bleue due au complexe que forme le diiode avec l'amidon apparaît. On ajoute alors immédiatement 2 mL de la solution de thiosulfate qui fait disparaître la coloration bleue ; celle-ci réapparaît à la date $t_2 = 183$ s. On ajoute 2 mL de la solution de thiosulfate, etc..., ce qui permet de dresser le tableau de mesures suivant :

t (s)	86	183	293	419	570	755	996	1341	1955
n (10^{-3}mol)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$[I_2]$(10^{-3}mol.L^{-1})									

1°) Expliquer comment cette méthode permet d'obtenir n de façon simple.
2°) En déduire la valeur de la concentration du diiode $[I_2]$ pour les différentes valeurs de n et compléter le tableau donné. On considérera que le volume total de la solution demeure constant et égal à 200 mL.

3°) Tracer sur du papier millimétré le graphe représentant les variations de $[I_2] = f(t)$.

4°) Déterminer la vitesse de formation du diiode à la date t = 200 s. Comment la vitesse v_{I_2} varie-t-elle au cours du temps ? Quel est, en fait, le facteur qui fait varier la vitesse ? Préciser dans quel sens il agit.

5°) Quelle sera la quantité de diiode formé au bout d'un temps infini ? Quelle sera alors la vitesse de formation du diiode ?

6°) Citer un autre facteur qui permettrait de faire varier la vitesse de formation du diiode.

Rép. Num. : 4°) $v_{I_2} = 4{,}9.10^{-5}\,\text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$.

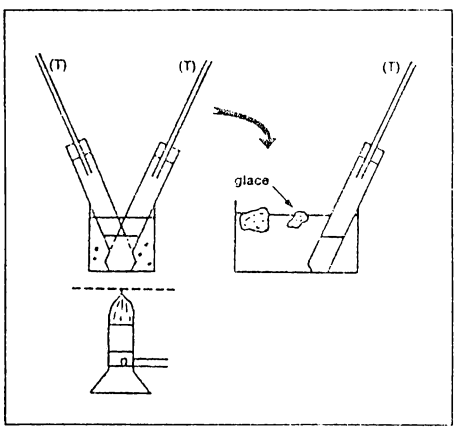
5°) $n_{I_2})_\infty = 9{,}82.10^{-3}\text{mol}$.

Exercice n°8 :

On veut étudier la cinétique de la réaction entre l'acide méthanoïque $HCOOH$ et le pentan-1-ol $CH_3-(CH_2)_3-CH_2OH$.

1°) - Quel est le nom de cette réaction ?
- Ecrire son équation bilan.
- Nommer les produits formés.

2°) On mélange rapidement 0,2 mol de chacun de ces réactifs. On répartit, de façon égale, ce mélange dans 10 tubes à essai prolongés par un long tube ouvert (T).



On plonge simultanément les 10 tubes à essai dans l'eau bouillante.

Sachant que les températures d'ébullition de l'acide, de l'alcool et du produit formé sont supérieures à 100°C, à quoi servent les tubes (T) ?

3°) On retire successivement les tubes à essais au bout de temps respectivement égaux à 3, 8, 18, 28, 38, 48, 58 et 68 min. Chacun d'eux est aussitôt plongé dans la glace (voir figure ci-dessus). Quelle est la raison de cette dernière opération ?

4°) On dose alors l'acide restant dans chaque tube à essai par une solution d'hydroxyde de sodium de concentration c_B = 1 mol.L^{-1}. Etablir la relation liant le volume de soude V_B nécessaire à la neutralisation de cet acide et le nombre de moles n_E du produit organique (E) formé dans ce tube au cours de son séjour au bain-marie.

5°) Compléter le tableau. Tracer la courbe $n_E = f(t)$.

Echelle : 1 cm pour 4 min en abscisse
1 cm pour 2.10^{-3}mol en ordonnée.

t (min)	0	3	8	18	28	38	48	58	68
V_B (cm^3)	20	16	13,5	10	8,5	7,2	6,9	6,9	6,9
n_E (mol)									

6°) Calculer la vitesse de formation de (E) dans le tube sorti à l'instant de date t = 8 min puis à l'instant de date t = 38 min. Quelle est la valeur limite de cette vitesse lorsque t augmente ?

7°) Calculer la limite de la valeur $\frac{n_E}{0,02}$, rendement de la réaction. Comment expliquer que ce rendement soit nettement inférieur à 100 % ?

Rép. Num. :

6°) $v_{t_8} = 4.10^{-4}$ mol.min^{-1} , $v_{t_{38}} = 6,92.10^{-5}$ mol.min^{-1}.

7°) $R = 65,5$ %.

Equilibre d'estérification – hydrolyse

Exercice n°1 :

1°)a) On mélange deux moles de butan-1-ol et trois moles d'acide éthanoïque. Le nombre de moles d'ester obtenu à l'équilibre est 1,57 mol. En déduire la constante d'équilibre.

b) Que deviendra la composition du mélange final à l'équilibre si on part d'un mélange initial mole à mole ?

2°) On mélange une mole de butan-1-ol avec deux moles d'acide éthanoïque. Au bout d'un temps t_1, la somme des nombres de moles de l'alcool et de l'acide existant en solution est 1,50 mol.

a) Déterminer la composition molaire du mélange à l'instant t_1.

b) Cette composition obtenue à l'instant t_1 subira-t-elle un changement ? Si oui, préciser, en le justifiant, dans quel sens ?

Rép. Num. : (Bac)

1°) a) $K = 4$; b) $n_{alcool} = n_{acide} = \frac{1}{3}$ mol et $n_{ester} = n_{eau} = \frac{2}{3}$ mol.

2°) a) $n_{alcool} = 0{,}25$ mol , $n_{acide} = 1{,}25$ mol et $n_{ester} = n_{eau} = 0{,}75$ mol.

Exercice n°2 :

On mélange 32 g de méthanol, 60 g d'acide éthanoïque, 18 g d'eau et 74 g d'éthanoate de méthyle.

1°) Ecrire l'équation chimique qui représente les transformations chimiques du mélange.

2°)a) Quel est le nombre de mole initial de chacun de ces corps ?

b) Le mélange précédent est-il en état d'équilibre dynamique ? Justifier la réponse. On donne la constante d'équilibre de la réaction d'estérification $K_c = 4$.

c) Déterminer la composition du mélange à l'équilibre.

3°) Que se passe-t-il si on augmente la température du mélange :

- initial ;
- à l'état d'équilibre dynamique.

4°) On ajoute m (g) d'eau à l'équilibre précédent.

a) Dans quel sens l'équilibre se déplace-t-il ?

b) Lorsque le nouvel état d'équilibre est établi, le nombre de mole d'acide éthanoïque est égal à 1 mole. Calculer la valeur de m.

Rép. Num. : 2°) c) $n_{alcool} = n_{acide} = \frac{2}{3}$ mol , $n_{ester} = n_{eau} = \frac{4}{3}$ mol.

4°) b) $m = 54$ g.

Exercice n°3 :

On réalise un mélange équimolaire constitué d'une mole d'ester et d'une mole d'eau à la température 80°C.

1°) Quelle réaction a lieu spontanément à l'instant du mélange ?

2°) Au bout d'un temps t_1, on dose l'acide dans le mélange réactionnel, on trouve alors un nombre de mole d'acide $n_{acide} = \frac{1}{3}$ mol.

a) Quelle est la composition du mélange à cet instant t_1 ?

b) Ce mélange constitue-t-il un système en état d'équilibre dynamique ? Justifier la réponse. On donne $K_{hydrolyse} = 0{,}25$.

c) Quelle est alors le rendement R de la réaction, défini par :

$$R = \frac{n_{alcool(ou\ acide)})_{formé}}{n_{réactif})_{initial\ en\ défaut}}$$

Donner l'allure de la courbe représentant le nombre de mole d'ester restant en fonction du temps $n_{ester} = f(t)$. Préciser les points remarquables.

3°) On désire améliorer ce rendement afin qu'il soit $R' = 50$ %. On propose alors les procédures suivantes :

α) Diminuer la température.

β) Partir d'un mélange initial plus riche en ester, le nombre de mole d'eau initial étant inchangé.

δ) Utiliser un catalyseur (ions H^+)

a) Quelle(s) est (ou sont) la (ou les) procédures permettant d'atteindre cet objectif. Justifier la réponse ?

b) Dans le cas β), quel est alors la quantité d'ester initiale dans le mélange pour avoir un rendement égal à 50 %.

c) Donner l'allure des courbes $n_{ester} = f(t)$ relatives aux trois cas α, β, δ (dans le même repère). Préciser les points remarquables.

Rép. Num. :

2°) a) $n_{alcool} = \frac{1}{3}$ mol , $n_{ester} = n_{eau} = \frac{2}{3}$ mol ; c) $R = 33$ %.

3°) b) $n_{eter})_{initial} = 2{,}5$ mol.

Produit de solubilité

Exercice n°4 :

1°) Le produit de solubilité de $Al(OH)_3$ est $K_s = 10^{-32}$ à 25° C . Calculer sa solubilité s dans l'eau pure à cette température.

2°) Calculer à 25°C, la solubilité s' de $Al(OH)_3$ dans une solution de $Ca(OH)_2$ à 0,1 mol.L^{-1}.
Comparer s et s' Conclure.
On donne : $3s' + 0{,}2 \approx 0{,}2$.
Rép. Num. : 1°) $s = 4{,}38.10^{-9}$ mol.L^{-1}
2°) $s' = 1{,}25.10^{-30}$ mol.L^{-1}

Exercice n°5 :

Le produit de solubilité du chlorure d'argent $AgCl$ à la température 25°C est $K_s = 1{,}77.10^{-10}$.

1°)a) Déterminer la solubilité s de $AgCl$ à 25°C.

b) On désire préparer à 25°C un litre de solution aqueuse saturée en chlorure d'argent. Déterminer la masse de $AgCl$ à utiliser.

2°) On prélève un volume $V_1 = 10$ cm^3 de la solution préparée et on lui ajoute un volume $V_2 = 20$ cm^{3}d'une solution de chlorure de sodium de concentration molaire $C_1 = 10^{-3}$ mol.L^{-1}. Y a-t-il une précipitation ? Justifier la réponse.

3°) A 10 cm^3 de la solution initiale, on ajoute maintenant un volume V_2 égal à 20 cm^3 d'une solution de chlorure de sodium de concentration inconnue C_2. Pour qu'aucune réaction ne se produise dans le mélange, montrer que la concentration C_2 doit être inférieure à une valeur C_o que l'on calculera.

Les masses molaires atomiques en g.mol^{-1}: M (Ag) = 108 ; M (Cl) = 35,5.
Rép. Num.: (Bac)
1°) a) $s = 1{,}33.10^{-5}$ mol.L^{-1} ; b) $m_{AgCl} = 1{,}91$ mg.
3°) $C_o = 5{,}32.10^{-5}$ mol.L^{-1}.

Exercice n°6 :

La réaction de dissolution du nitrate de sodium dans l'eau s'effectue selon l'équation : $NaNO_{3(sd)} \rightleftharpoons Na^+ + NO_3^-$

1°) Exprimer le produit de solubilité du nitrate de sodium.

2°) On introduit 100 g de nitrate de sodium dans de l'eau pure de façon à obtenir 100 cm^{3}de solution. Après agitation et décantation, on remarque que la dissolution n'est pas complète, la masse de nitrate non dissous est égale à 10 g. La température est maintenue à 20°C.

a) Quelle est la solubilité du nitrate de sodium dans l'eau à 20°C.

b) Calculer le produit de solubilité du nitrate de sodium à cette température.

3°) On introduit à 20°C, 90 g de nitrate de sodium dans une solution d'acide nitrique de concentration 1 mol.L^{-1} de façon à obtenir 100 cm^3 de solution.

Sachant que la réaction de l'acide nitrique avec l'eau est totale selon l'équation :

$$HNO_3 + H_2O \longrightarrow H_3O^+ + NO_3^-$$

a) La dissolution du nitrate sera-t-elle complète ? Justifier la réponse.

b) Calculer la masse de nitrate de sodium dissous en supposant que la dissolution du solide s'accompagne d'une variation de volume négligeable.

Les masses molaires atomiques en $g.mol^{-1}$:

M $(Na) = 23$; M $(N) = 14$; M $(O) = 16$; M $(H) = 1$.

Rép. Num. : 2°) a) $s = 10{,}6$ mol.L^{-1} ; b) $K_s = 112$.

3°) $m_{NaNO_3)_{dissociée}} = 85{,}8$ g .

Exercice n°7 :

On donne les produits de solubilité dans l'eau pure à 25°C des électrolytes suivants :

* Sulfate de calcium $CaSO_4$: $K_{s_1} = 6.10^{-5}$.

* Sulfate de sodium Na_2SO_4 : $K_{s_2} = 320$.

1°) Quelle remarque vous suggère la valeur de K_{s_2} ?

2°) Calculer les concentrations de Ca^{2+} et SO_4^{2-} dans une solution saturée de $CaSO_4$.

3°) On mélange à 25°C, un volume $V_1 = 50$ cm^3 d'une solution de chlorure de calcium $CaCl_2$ de concentration $C_1 = 10^{-2}$ mol.L^{-1} avec un volume $V_2 = 150$ cm^3 d'une solution de sulfate de sodium de concentration C_2.

a) Quelle valeur de C_2 doit-on dépasser pour obtenir une précipitation.

b) Déterminer la masse du précipité formé pour $C_2 = 10^{-1}$ mol.L^{-1} .

Les masses molaires atomiques en $g.mol^{-1}$:

M $(Ca) = 40$; M $(S) = 32$; M $(O) = 16$.

Rép. Num. : 2°) $[Ca^{2+}] = [SO_4^{2-}] = 7{,}74.10^{-3}$ mol.L^{-1}.

3°) a) $C_2 > 3{,}2.10^{-2}$ mol.L^{-1} , b) $m = 4{,}76.10^{-2}$ g.

Exercice n°8 :

On dispose d'une solution S contenant à la fois du chlorure de baryum et du chlorure de sodium, tout deux à l'état dissous. La concentration en chacun de ces deux sels dans S est 0,1mol.L^{-1}.

Les produits de solubilité sont : $K_{s_1} = 2{,}4.10^{-5}$ pour $CaSO_4$

$K_{s_2} = 1{,}1.10^{-10}$ pour $BaSO_4$

On ajoute progressivement des cristaux de sulfate de sodium Na_2SO_4 (sel très soluble dans l'eau) à la solution S. Le volume de S reste pratiquement inchangé.

1°) Quel sel parmi $CaSO_4$ et $BaSO_4$, celui qui précipitera le premier ?

2°)a) Quelle est la molarité des ions SO_4^{2-} quand le deuxième précipité commence à se former ?

b) Quelles sont à ce moment là, les molarité de Ca^{2+} et de Ba^{2+} dans la solution S.

Rép. Num. : 2°) a) $[SO_4^{2-}] = 2{,}4.10^{-4}$ mol.L^{-1} ;

b) $[Ba^{2+}] = 4{,}58.10^{-7}$ mol.L^{-1} , $[Ca^{2+}] = 0{,}1$ mol.L^{-1}.

Equilibre en phase gazeuse

Exercice n°9 :

En introduisant dans une enceinte de volume 10 L, 0,40 mole de diiode, 0,40 mole de dihydrogène et 0,60 mole d'iodure d'hydrogène, on aboutit, à la température T, à un équilibre chimique caractérisé par la constante d'équilibre $K = 49$ et par l'équation :

$$H_{2(g)} + I_{2(g)} \underset{\rightarrow}{\overset{\leftarrow}{\rightleftharpoons}} 2\,HI_{(g)}$$

Dans les conditions de l'expérience , tout les corps mis en jeu sont à l'état gazeux.

1°) Rappeler l'expression de la constante K de cet équilibre.

2°)a) Calculer la concentration initiale de chacun des constituants du mélange réalisé.

b) En déduire le rapport $\Pi = \dfrac{[HI]_i^2}{[H_2]_i[I_2]_i}$ des concentrations où i est un indice indiquant l'état initial.

c) Comment évolue le système ? Justifier la réponse.

3°) Le système étant à l'équilibre à la température T :

a) Déterminer la concentration de chacun des constituants du mélange.

b) Montrer sans faire de calcul, que toute variation de la pression à température constante n'influe pas sur l'état d'équilibre du système.

c) A une température T' supérieure à T, la constante d'équilibre du système prend une nouvelle valeur $K' < K$.

- Préciser le sens dans lequel l'équilibre s'est déplacé. Justifier la réponse.

- Que peut-on conclure quant au caractère énergétique de la réaction de synthèse de l'iodure d'hydrogène ? Justifier la réponse.

Rép. Num.: (Bac)

2°) b) $\Pi = 2{,}25$

3°) a) $[H_2]_{éq} = [I_2]_{éq} = 1{,}6.10^{-2}$ mol.L^{-1} , et $[HI]_{éq} = 10{,}8.10^{-2}$ mol.L^{-1}.

Exercice n°10 :

On étudie l'équilibre chimique de dissociation du peroxyde d'azote sous la pression de 1 atm et à la température de 25°C :

$$N_2O_4 \quad \underset{\text{(gaz incolore)}}{\overset{\text{(1)}}{\rightleftharpoons}} \quad \underset{\text{(gaz rouge brun)}}{2NO_2}$$

A l'équilibre, on a dans une enceinte de volume $V = 22$ L constant : 0,6 mole de N_2O_4 et 0,3 mole de NO_2.

1°) On réalise les expériences décrites ci-après et on observe dans chaque cas l'évolution du système vers le nouvel état d'équilibre :

a) On retire x mole ($x < 0,3$) de NO_2. Comment évolue le système ? Justifier.

b) On élève la température, on remarque une augmentation de l'intensité de la coloration, que peut-on dire quant au caractère énergétique de la réaction de dissociation ? Justifier.

c) On augmente la pression, le mélange gazeux devient incolore. Indiquer les effets de variation de la pression sur les réactions (1) et (2). Justifier.

2°)a) Calculer la constante d'équilibre K_c de la réaction correspondant à l'équilibre initial à 25°C.

b) On ajoute dans l'enceinte à la température 25°C 0,4 mole de N_2O_4, quelle est la nouvelle composition du mélange ?

Rép. Num.: (Bac)

2°)a) $K_c = 6,82.10^{-3}$;

b) $n_{N_2O_4} = 0,96$ mol et $n_{NO_2} = 0,38$ mol.

Exercice n°11 :

Dans une enceinte de volume $V = 2$ L, on mélange 1,5 moles de chlorure d'hydrogène (gaz) et 0,3 mole de dioxygène (gaz) à la température T.

On aboutit à une réaction limitée dont l'équation chimique est :

$$4HCl_{(g)} + O_{2(g)} \quad \underset{\text{(2)}}{\overset{\text{(1)}}{\rightleftharpoons}} \quad 2Cl_{2(g)} + 2H_2O_{(g)}$$

1°) A l'équilibre, il se forme 0,16 mole de vapeur d'eau.

a) Montrer que les nombres de moles de Cl_2, O_2 et HCl présents à l'équilibre sont respectivement : $n_{Cl_2} = 0,16$ mol , $n_{O_2} = 0,22$ mol et $n_{HCl} = 1,18$ mol.

b) En déduire la valeur de la constante d'équilibre K_c.

2°) A une température $T' > T$ un nouvel état d'équilibre s'établit lorsque 17,2% du chlorure d'hydrogène initial ont été consommé.

a) Déterminer la nouvelle composition du mélange à l'équilibre.

b) Montrer que la nouvelle valeur de la constante d'équilibre est : $K'_c = 98,83.10^{-5}$.

c) Que peut-on conclure quant au caractère énergétique des deux réactions associées aux sens (1) et (2) ? Justifier la réponse.

3°) La température étant maintenue constante, quel est l'effet d'une augmentation de pression sur cet équilibre ? Justifier la réponse.

Rép. Num.: (Bac)

1°) b) $K_c = 3{,}07.10^{-3}$.

2°) a) $n_{H_2O})_{éq} = n_{Cl_2})_{éq} = 12{,}9.10^{-2}$ mol , $n_{O_2})_{éq} = 23{,}55.10^{-2}$ mol,

$n_{HCl})_{éq} = 124{,}2.10^{-2}$ mol.

Exercice n°12 :

La dissociation du gaz ammoniac NH_3 en diazote N_2 et en dihydrogène H_2 est une réaction endothermique. Dans des conditions de température et de pression convenables, cette dissociation est réversible et conduit à un équilibre chimique dynamique décrit par l'équation suivante :

$$2NH_{3(g)} + \text{chaleur} \quad \underset{\downarrow}{\overset{\uparrow}{\rightleftharpoons}} \quad N_{2(g)} + 3H_{2(g)}$$

1°) A température constante, faut-il augmenter ou diminuer la pression pour favoriser la dissociation de l'ammoniac ? Justifier la réponse.

2°) A pression constante, faut-il élever ou abaisser la température pour favoriser la synthèse de l'ammoniac ? Justifier la réponse.

3°) On définit le coefficient de dissociation de l'ammoniac noté α par :

$$\alpha = \frac{\textit{nombre de mole de } NH_3 \textit{ dissocié}}{\textit{nombre de mole de } NH_3 \textit{ initial}}$$

Sachant qu'on part initialement de n_o mole de NH_3, exprimer la constante d'équilibre K_c relative à la réaction de dissociation de NH_3 en fonction de :

$\alpha_{éq}$ (coefficient de dissociation à l'équilibre), n_o et V : volume total du mélange réactionnel gazeux.

4°) Dans un récipient de volume constant V = 1 L, on introduit n_o = 3 moles de NH_3. Sachant que K_c = 16,6 à T = 500°C, calculer $\alpha_{éq}$. En déduire la composition du mélange gazeux à l'équilibre à cette température.

Rép. Num.:

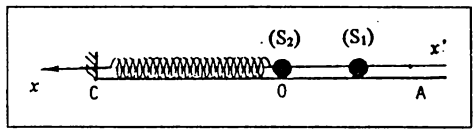
4°) $\alpha_{éq} = 0{,}627$, $[N_2]_{éq} = 0{,}94$ mol.L^{-1} , $[H_2]_{éq} = 2{,}82$ mol.L^{-1} ,

$[NH_3]_{éq} = 1{,}12$ mol.L^{-1}.

Exercice n°1 :

Un solide ponctuel (S_1) de masse m_1 est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_1$ le long d'un rail horizontal AC. En arrivant au point O, il heurte un autre solide ponctuel (S_2) de masse m_2 initialement au repos. (S_2) est lié à l'extrémité d'un ressort de raideur k, dont l'autre extrémité est fixe.

Après le choc, (S_1) et (S_2) restent accolés et le ressort se comprime jusqu'à l'abscisse x_M.



On donne : $m_1 = 100$ g ; $\|\vec{v}_1\| = 1$ m.s^{-1}

$k = 10$ N.m^{-1} et $x_M = 5$ cm.

1°) Exprimer l'énergie mécanique du système (S) : { S_1, S_2, Ressort} après le choc, sachant que le déplacement de (S_1, S_2) le long de ($x'x$) s'effectue sans frottement. Calculer cette énergie.

2°) Calculer la variation de l'énergie mécanique du système (S) au cours du choc.

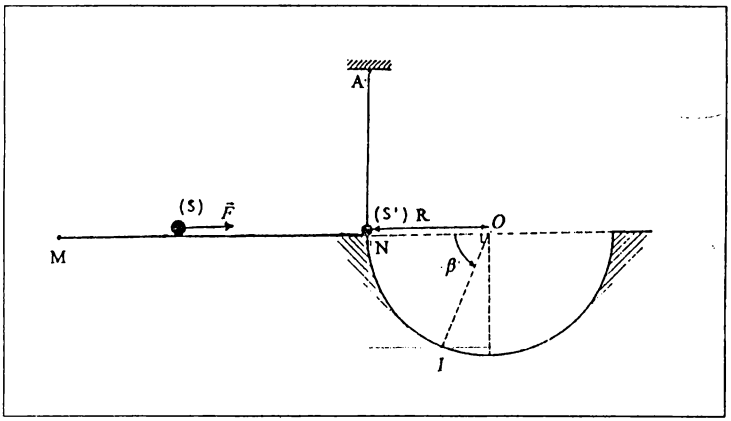
3°) Calculer la valeur de la masse m_2 du solide (S_2) et celle de la vitesse $\vec{v}_2$ de (S_1, S_2) juste après le choc.

Rép. Num. : 1°) $E = 12{,}5.10^{-3}$ J. 2°) $\Delta E = -37{,}5.10^{-3}$ J.

3°) $\|\vec{v}_2\| = 0{,}25$ m.s^{-1} , $m_2 = 300$ g.

Exercice n°2 :

Un solide (S) de masse m = 100 g, supposé ponctuel, se déplace sur une piste horizontale MN. Partant du repos, le solide est soumis à une force $\vec{F}$ supposée constante, horizontale et ne s'applique qu'entre M et N.



En arrivant en N, le solide (S) heurte un deuxième solide (S'), supposé ponctuel de masse $m' = 50$ g, suspendu à un fil de longueur $l = 0{,}4$ m et de masse négligeable constituant un pendule simple fixe en A. Après le choc, supposé parfaitement élastique, le pendule atteint une abscisse angulaire maximale $\alpha_m = 60°$.

On négligera tout frottement.

On donne : $MN = 2{,}25$ m.

1°) Calculer la vitesse du solide (S') juste après le choc.

2°) Calculer les vitesses du solide (S) juste avant et juste après le choc.

3°) Calculer l'intensité de la force $\vec{F}$.

4°) Quelle devrait être la vitesse minimale de (S') juste après le choc pour que le pendule puisse atteindre l'horizontale ?

5°) On suppose que la vitesse de (S) s'annule au cours du choc et qu'il descend suivant la piste circulaire.

a) Calculer la vitesse de (S) au point I et donner les caractéristiques de la réaction $\vec{R}$ de la piste sur (S) en ce point. On donne $\beta = 60°$; $R = OI = 0{,}9$ m.

b) En réalité le solide (S) arrive en I avec une vitesse $\|\vec{v}_I'\| = 3\ \text{m.s}^{-1}$, il est donc soumis à une force de frottement $\vec{f}$ d'intensité supposée constante, de même direction que le vecteur vitesse et de sens opposé à celui-ci.

Calculer l'intensité de $\vec{f}$.

Rép. Num.: 1°) $\|\vec{v}_{S'}'\| = 2\ \text{m.s}^{-1}$. 2°) $v_S = 1{,}5\ \text{m.s}^{-1}$ et $v_S' = 0{,}5\ \text{m.s}^{-1}$.

3°) $\|\vec{F}\| = 5.10^{-2}$ N. 4°) $\|\vec{v}_{S'}'\| = 2{,}82\ \text{m.s}^{-1}$.

5°)a) $\|\vec{v}_I\| = 3{,}95\ \text{m.s}^{-1}$, $\|\vec{R}\| = 2{,}6$ N ; b) $\|\vec{f}\| = 0{,}35$ N.

Exercice n°3 :

Une tige (S) homogène, de centre d'inertie G, peut tourner autour d'un axe

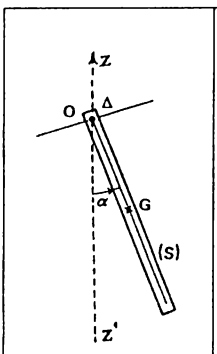


Fig-1

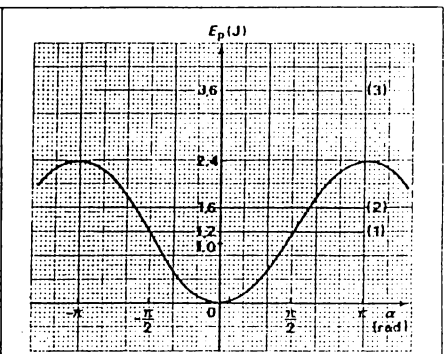


Fig-2

horizontal (Δ), qui la traverse perpendiculairement en O (figure-1).
On pose $d(O,G) = a = 0{,}25$ m. On repère la position de la tige, par l'angle α, que fait OG avec la verticale Oz. On donne la représentation graphique de l'énergie potentielle du système { tige, terre } en fonction de l'angle α (figure-2).
1°) D'après cette courbe, dire quelle est la position adoptée par convention pour le niveau d'énergie potentielle nulle ?
2°) La tige (S) étant en rotation autour de l'axe (Δ), nous envisagerons 3 valeurs possibles de l'énergie mécanique totale, celles des droites (1), (2), (3).
1er cas : L'énergie mécanique totale est représentée par la droite (1) :
a) Décrire avec précision la trajectoire de G.
b) Calculer la masse m de la tige (S) en rotation.
2ème cas : L'énergie mécanique totale est représentée par la droite (2) :
a) Montrer que la trajectoire de G est un arc de cercle dont on demande la mesure de son écart angulaire en degrés.
b) Quel est le module $\|\vec{v}\|$ de la vitesse de G, au passage par la position d'équilibre ?
c) Déterminer, sans calcul, la (ou les) position(s) de (S) lorsque son énergie cinétique vaut 0,4 J.
3ème cas : L'énergie mécanique totale est représentée par la droite (3) :
a) Quelle est la trajectoire de G.
b) Calculer les modules $\|\vec{v}_1\|$ et $\|\vec{v}_2\|$ des vitesses maximale et minimale de G.
c) Représenter les vecteurs vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sur un schéma qui traduira la position de (S) à l'instant correspondant.
3°) Le point G décrit un cercle complet. Sa vitesse passe par une valeur maximale $\|\vec{v}_{max}\|$ et par une valeur minimale $\|\vec{v}_{min}\|$. En utilisant le graphique (figure-2), déterminer l'énergie mécanique totale du système dans le champ de pesanteur lorsque $\dfrac{\|\vec{v}_{max}\|}{\|\vec{v}_{min}\|} = 2$. Justifier la réponse.

Rép. Num.: 2°) *1er cas* : b) $m = 0{,}48$ Kg ;
2ème cas : a) $\pm\alpha_m \approx \pm 109^\circ$; b) $\|\vec{v}\| \approx 2{,}23\ \text{m.s}^{-1}$;
3ème cas : b) $\|\vec{v}_1\| = 3{,}35\ \text{m.s}^{-1}$ et $\|\vec{v}_2\| = 1{,}94\ \text{m.s}^{-1}$; 3°) $E = 3{,}2$ J.

Exercice n°4 :

Les extrémités de deux ressorts identiques (R_1) et (R_2) (de masse négligeable, de raideur k et de longueur à vide l_o) sont fixées en deux points A et B et soudées à un solide (C) de masse m (figure-1). Le solide (C), supposé ponctuel, peut coulisser sans frottement sur une tige rigide soudée en A et B et telle que $AB = 2l$, avec $l > l_o$

1°) La tige AB étant horizontale et le solide (C) en équilibre, exprimer l'énergie potentielle E_{p_1} du système (S) :{C, R_1, R_2, terre } en fonction de l, l_o et k.

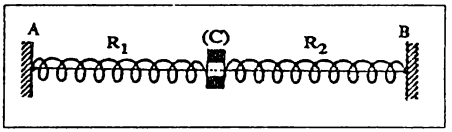


Fig-1

On prendra le plan horizontal contenant (C) comme plan de référence pour l'énergie potentielle de pesanteur.

2°) Un dispositif permet de bloquer le solide dans sa position d'équilibre pendant que l'on bascule AB en position verticale (fig-2).

a) Sachant que le solide (C) est resté dans le plan horizontal de référence, l'énergie potentielle du système (S) a-t-elle varié ?

b) On prend comme origine O sur l'axe $(x'x)$ vertical la position du solide (C) bloqué. On libère ce dernier à la date $t = 0$.

Exprimer l'énergie potentielle E_{p_2} du système (S) à une date ultérieure t en fonction de l, l_o, m, $\|\vec{g}\|$, k et x avec x : abscisse du solide (C) sur l'axe $(x'x)$ à la date t.

c) Ecrire l'expression de l'énergie mécanique E du système (S) en fonction de l, l_o, m, $\|\vec{g}\|$, k, x et v avec $v = \frac{dx}{dt}$.

- Comparer E et E_{p_1}. Calculer E.

- Montrer que la vitesse v du solide s'annule en deux positions d'abscisses x_1 et x_2 que l'on calculera ; on notera x_2 l'abscisse correspondant à la position la plus basse.

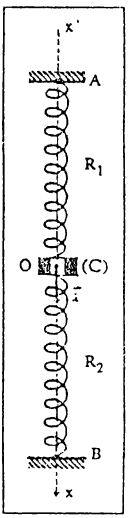


Fig-2

On donne : $k = 20$ N.m^{-1} ; $m = 0{,}25$ Kg ; $l = 25$ cm ; $l_o = 20$ cm .

Rép. Num.: (Bac)

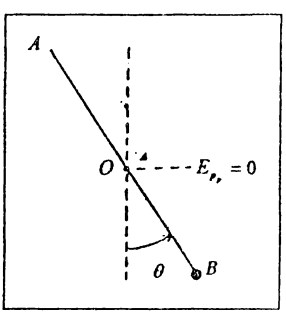
2°) c) $E = 5.10^{-2}$ J, $x_1 = 0$ cm et $x_2 = 12{,}5$ cm.

Exercice n°5 :

Une tige (AB) homogène, de section constante, de masse m = 150 g et de longueur $2L$ = 40 cm, peut tourner dans un plan vertical autour d'un axe fixe (Δ) horizontal passant par son milieu O.

On fixe en B une bille supposée ponctuelle de même masse que la tige. Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Δ) est $J_o = \frac{1}{3}mL^2$.

L'élongation angulaire θ est déterminée à partir de la position d'équilibre stable comme l'indique la figure.



PARTIE A/

Les frottements sont supposés négligeables.

1°) Montrer que le centre d'inertie de l'ensemble (tige, bille) se trouve au milieu de *OB*.

2°)a) Enoncer le théorème de la variation de l'énergie cinétique.

b)La tige, écartée de sa position d'équilibre stable d'un angle $\theta_o = +\frac{\pi}{3}$ rad, est lancée avec une vitesse angulaire θ'_o dans le sens négatif des élongations angulaires. Déterminer la valeur minimale de θ'_o qui permet à la tige d'atteindre sa position d'équilibre instable (*G* au dessus de *O*).

3°) La tige est à présent écartée à partir de sa position d'équilibre stable, d'un angle $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ rad et abandonnée sans vitesse initiale.

a) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique *E* du système {tige, bille, terre} pour une élongation angulaire θ au cours de son mouvement. L'origine des énergies potentielles est prise au niveau de l'horizontale passant par *O*.

b) Montrer que le système est conservatif ; en déduire la vitesse linéaire de la bille lors de son premier passage par la position d'équilibre stable.

PARTIE B/

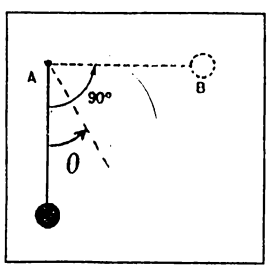
Les frottements ne sont plus négligeables ; ils sont caractérisés par un moment M_o de valeur constante. On écarte la tige de sa position d'équilibre stable, d'un angle $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ rad et on l'abandonne sans vitesse initiale; la valeur de la vitesse linéaire de la bille lors de son premier passage par la position d'équilibre stable n'est plus que 1,2 $m.s^{-1}$. Calculer M_o.

Rép. Num.:

A/ 2°) b) $|\theta'_o|_{min} = 10{,}6$ $rad.s^{-1}$; 3°) b) $v_2 = -1{,}73$ $m.s^{-1}$. B/ $M_o \approx 0{,}1$ N.m.

Exercice n°6 :

A l'extrémité *B* d'une tige *AB* de masse négligeable et de longueur *L* = 80 cm est soudé un solide supposé ponctuel de masse *m* = 70 g. L'ensemble constituant un pendule, est mobile autour d'un axe horizontal (Δ) fixe et passant par l'extrémité *A*.



On écarte alors le pendule de sa position d'équilibre stable de l'angle $\theta_o = \frac{\pi}{2}$ rad et on l'abandonne sans vitesse initiale à la date t = 0 (figure-1). On néglige tout frottement. Fig-1

1°) En utilisant le théorème de la variation de l'énergie cinétique, donner en fonction de $\cos\theta$, l'expression de l'énergie cinétique E_c du pendule au passage par la position faisant l'angle θ avec la position d'équilibre stable.

2°) On donne sur la figure-2 la représentation graphique de l'énergie potentielle E_p du système { pendule, terre } en fonction de $cos\theta$.

a) Déduire la convention adoptée pour le plan de référence de l'énergie potentielle.

b) Justifier l'allure de la courbe de la fonction : $E_p = f(cos\theta)$.

c) Tracer les courbes représentatives de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie mécanique E du système { pendule, terre } en fonction de $cos\theta$.

d) Déduire l'écart angulaire θ pour lequel l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p ont la même valeur.

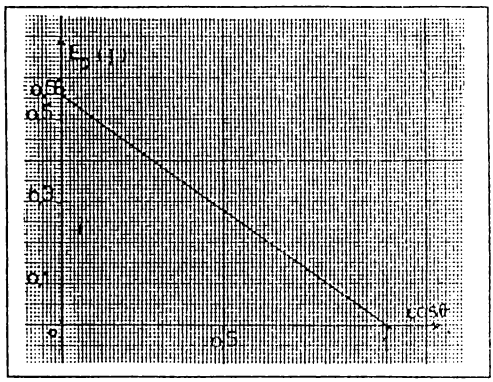


Fig-2

3°) Le pendule initialement écarté de $\frac{\pi}{2}$ rad, par rapport à sa position d'équilibre, est abandonné cette fois avec une énergie cinétique de valeur E_{c_1} =0,14 J.

a) Retracer les nouvelles représentations de E_p, E_c et de E en fonction de $cos\theta$. Indiquer ces changements sur le graphique. En déduire l'écartement maximal de la tige au delà de sa position d'équilibre stable.

b) Quelle est l'énergie cinétique au passage de la tige par la position définie par $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad.

Rép. Num. : 2°) d) $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad ; 3°) b) $E_c = 0{,}42$ J.

Exercice n°7 :

Le dispositif de la figure ci-dessous peut jouer le rôle d'un lanceur de projectile. Il est constitué :

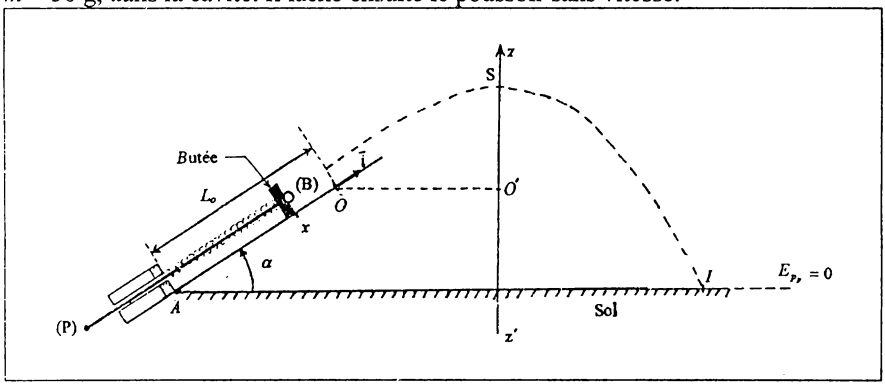
- d'un poussoir (P) formé d'une tige de masse négligeable soudée à une butée circulaire de masse $m' = 100$ g au centre de laquelle est ménagée une petite cavité sphérique.
- d'un ressort (R) à spires non jointives de masse négligeable, de constante de raideur $k = 500$ N.m^{-1} et de longueur à vide $AO = L_o = 50{,}8$ cm.

On dispose le lanceur sur un plan incliné par rapport à l'horizontale d'un angle $\alpha = 60^\circ$.

Le déplacement de la butée sur ce plan s'effectue sans frottement.

Un opérateur tire sur le poussoir (P) afin que le ressort soit comprimé de $a = 20$ cm après avoir placé le projectile (B), assimilable à une bille de masse

m = 50 g, dans la cavité. Il lâche ensuite le poussoir sans vitesse.



1°) On supposera, qu'au cours du mouvement, la bille reste en contact avec la butée.

a) Déterminer l'énergie cinétique de la bille au point O.

b) On supposera isolé le système (S_1) : { (B), lanceur, terre }.

Exprimer puis calculer l'énergie mécanique E de (S_1) à un instant de date t donné, après libération du poussoir.

Le niveau de référence de l'énergie potentielle est choisi au sol.

2°) On supposera qu'à l'instant de passage par O, le projectile (B) est éjecté, effectuant alors une chute libre parabolique.

a) A quelle hauteur h_{max} au dessus du plan horizontal passant par O, le projectile serait-il projeté ?

b) Quelle est l'énergie cinétique du projectile à son arrivée au sol en I.

3°) Construire le diagramme d'énergie du projectile dans le champ de pesanteur à partir de l'instant où il a quitté la butée. Ce diagramme doit comporter les courbes $E(z)$, $E_{p_p}(z)$ et $E_c(z)$. Préciser les points remarquables.

4°) A partir du diagramme d'énergie :

a) Expliquer les transformations mutuelles des différentes formes d'énergie mécanique.

b) Pour quelle altitude h_o au dessus du sol a-t-on $E_{p_p} = E_c$?

Rép. Num. :

1°) a) $E_c = 3{,}25$ J ; b) $E = 10{,}4$ J ; 2°) a) $h_{max} = 4{,}87$ m , b) $E_{c_I} = 3{,}47$ J.

4°) b) $h_o = 3{,}47$ m.

Exercice n°8 :

PARTIE A/

Un ressort de constante de raideur k, est fixé en O' par son extrémité supérieure. On attache à l'autre extrémité A un corps (C) de masse m et de faible dimension.

1°) L'extrémité A étant maintenu dans sa position primitive (voir figure-1), on lâche (C). Exprimer puis calculer l'allongement maximal x_m du ressort.

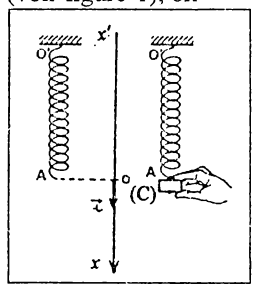


Fig-1

On donne : $m = 100$ g ; $k = 50$ N.m^{-1}.

2°) Lorsque cet allongement maximal est atteint, faire le bilan des forces qui s'exercent sur (C). Montrer qu'à cet instant, (C) n'est pas dans une position d'équilibre.

3°)a) Etablir l'expression de l'énergie potentielle du système (S) : { C, ressort, terre } à un instant quelconque t après la libération de (C), en fonction de x : abscisse de (C) à cet instant dans le repère (O, $\vec{i}$).

On prendra comme référence de l'énergie potentielle celle correspondante à la position du solide dans un plan horizontal passant par A.

b) En quelle position l'énergie potentielle est-elle minimale ? Vérifier que cette position correspond à la position d'équilibre stable de (C).

c) Montrer que la vitesse de (C) est maximale en cette position. Calculer sa valeur sachant que le système (S) est conservatif.

4°)a) Représenter graphiquement les variations de l'énergie mécanique totale E et de l'énergie potentielle E_p en fonction de x.

b) En déduire la représentation graphique de $E_c(x)$.

Quelles sont alors les valeurs de x pour lesquelles la vitesse de (C) s'annule.

PARTIE B/

Le solide (C) est à sa position d'équilibre, d'un point P situé à une distance $h = 3$ m au dessous de (C), on lance vers le haut suivant la verticale passant par A, une bille (B) de dimensions négligeables et de masse $m_B = 60$ g. La valeur de la vitesse initiale de (B) est $\|\vec{v}_o\| = 8\,\text{m.s}^{-1}$ (voir figure-2). Le choc ayant lieu entre (B) et (C) est parfaitement élastique, et les vitesses avant et après le choc sont colinéaires.

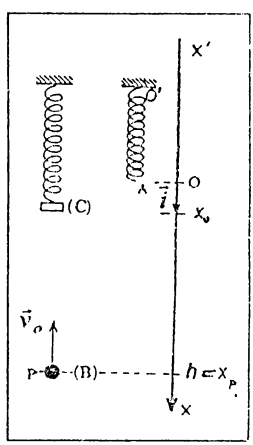


Fig-2

1°) Déterminer la vitesse de (B) juste avant le choc.

2°) Déterminer les vitesses de (C) et de (B) juste après le choc.

3°) Quelle est la compression maximale du ressort après le choc.

Rép. Num. :

A/ 1°) $x_m = 4$ cm. 3°) c) $\|\vec{v}_m\| = 0{,}45\,\text{m.s}^{-1}$.

B/ 1°) $\|\vec{v}_B\| = 2\,\text{m.s}^{-1}$; 2°) $v'_C = 1{,}5$ m.s^{-1} et $v'_B = -0{,}5\,\text{m.s}^{-1}$. 3°) $|x_m| = 4{,}7$ cm.

Exercice n°1 :

Un mobile (A) de centre d'inertie G et de masse M en forme d'anneau, pouvant coulisser sans frottement le long d'une tige horizontale, est attaché à deux ressorts (R_1) et (R_2) identiques à spires non jointives de masses négligeables ayant chacun une longueur à vide l_o et une raideur k comme l'indique la figure-1.

Les extrémités libres des deux ressorts sont fixées. A l'équilibre G se trouve en O, les deux ressorts sont allongés, ont la même longueur l, et restent allongés pendant toute l'expérience.

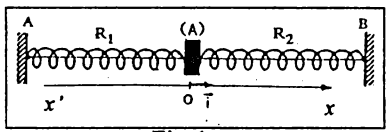


Fig-1

(A) est écarté de sa position de repos de x_o puis lancé avec une vitesse v_o à l'origine des dates.

Un dispositif approprié permet d'enregistrer les variations de l'élongations x de G en fonction du temps (figure-2).

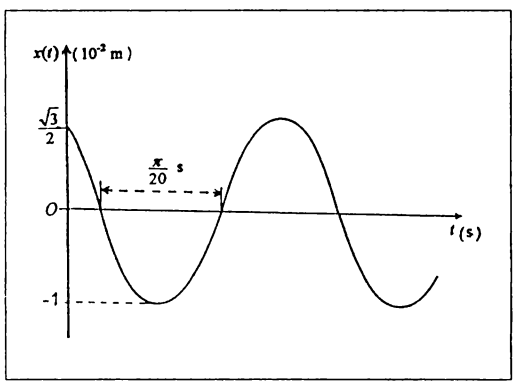


Fig-2

1°) A l'aide d'une étude dynamique, montrer que le mouvement de G est rectiligne sinusoïdal.

2°) Déterminer à partir de la courbe, la période propre T_o de l'oscillateur, en déduire la valeur de k sachant que $M = 100$ g.

3°) Etablir l'expression de l'élongation $x(t)$.

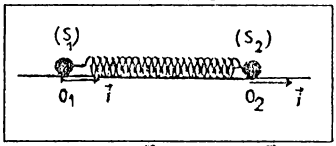
4°) Montrer que l'élongation x, la valeur de la vitesse v, la pulsation ω_o et l'amplitude X_m vérifient la relation : $x^2 + \left(\frac{v}{\omega_o}\right)^2 = X_m^2$; en déduire la valeur algébrique de la vitesse v_o.

Rép. Num. : 2°) $k = 20$ N.m^{-1}. 3°) $x(t) = 10^{-2} sin(20t + \frac{2\pi}{3})$ (m).

4°) $v_o = -0{,}1$ m.s^{-1}.

Exercice n°2 :

On considère le système (S) formé par un ressort (R) et deux solides ponctuels (S_1) et (S_2) de masses respectivement $m_1 = 50$ g et $m_2 = 100$ g liés aux extrémités de (R). Le ressort de masse négligeable a une longueur à vide $l_o = O_1O_2 = 30$ cm et sa raideur est $k = 10$ N.m^{-1}.



On tire (S_1) et (S_2) de façon que la longueur de (R) soit $l = 40$ cm et on les abandonne simultanément sans vitesse initiale à la date $t = 0$.

Les mouvements de (S_1) et (S_2) sont rapportés aux repères $(O_1, \vec{i})$ et $(O_2, \vec{i})$ avec O_1 et O_2 les positions d'équilibre respectivement de (S_1) et (S_2).

Soit $x_1 = \overline{O_1S_1}$ l'abscisse de (S_1) dans $(O_1, \vec{i})$ et $x_2 = \overline{O_2S_2}$ l'abscisse de (S_2) dans $(O_2, \vec{i})$ à une date quelconque t, et v_1 et v_2 les valeurs algébriques des vitesses de (S_1) et (S_2) à cette date.

1°) Montrer que la quantité de mouvement du système (S) se conserve et en déduire la relation : $\frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1}$.

2°) On admet que le rapport entre v_1 et v_2 est le même que celui des abscisses :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{x_1}{x_2}.$$

Exprimer l'énergie mécanique du système (S) en fonction de k, m_1, x_1 et v_1.

3°)a) Montrer que (S) est conservatif. Calculer son énergie mécanique.

b) En déduire l'équation différentielle du mouvement de (S_1). Quelle est la nature de ce mouvement.

c) Ecrire l'équation horaire du mouvement de (S_1) et celle du mouvement de (S_2). Comparer ces deux mouvements.

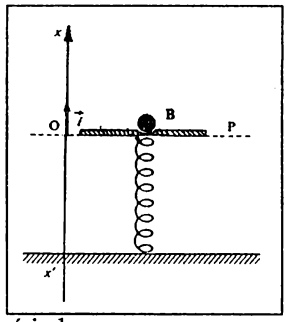
Rép. Num. :

3°) a) $E = 5.10^{-2}$ J ;

c) $x_1(t) = 6{,}66.10^{-2} \sin(17{,}32t - \frac{\pi}{2})$ (m) et $x_2(t) = 3{,}33.10^{-2} \sin(17{,}32t + \frac{\pi}{2})$ (m).

Exercice n°3 :

Un ressort (R) de masse négligeable, à spires non jointives et d'axe vertical, a une constante de raideur $k = 40$ N.m^{-1}. Son extrémité inférieure est fixée à un support, son extrémité supérieure est liée à un plateau (P) circulaire de masse $M = 200$ g centré sur l'axe du ressort et restant toujours horizontal. Dans une cavité ménagée au centre du plateau, on place une bille (B) de masse $m = M$ (voir figure ci-dessous).



1°) Quel est le raccourcissement a_o du ressort lorsque l'ensemble est en équilibre ?

2°) Soit $(x'Ox)$ le repère d'espace choisi, d'origine O confondu avec le centre d'inertie de l'ensemble {B, P} à l'équilibre, et orienté dans le sens ascendant. Un opérateur abaisse le plateau de 15 cm à partir de sa position d'équilibre puis l'abandonne sans vitesse initiale. En supposant que la bille reste en contact avec le plateau :

a) Montrer que l'ensemble {B, P} prend un mouvement rectiligne sinusoïdal. Calculer sa pulsation et sa période.

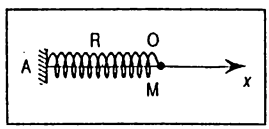
b) Donner l'équation horaire du mouvement. Exprimer son accélération en fonction de l'élongation x.

3°) Montrer que la bille quitte le plateau quand celui-ci atteindra une position que l'on précisera numériquement. Quelle est alors en ce point, la tension du ressort. Conclure.

Rép. Num. : 1°) $a_o = 0{,}1$ m. 2°) a) $T_o = 0{,}628$ s ; b) $x(t) = 0{,}15 sin(10t - \frac{\pi}{2})$ (m).

3°) $x_1 = 0{,}1$ m.

Exercice n°4 :



Un ressort élastique (R) à spires non jointives, de masse négligeable, de longueur AO au repos et de constante de raideur $k = 15\ \text{N.m}^{-1}$ est disposé horizontalement suivant une tige Ax. L'extrémité A du ressort est fixe ; à l'autre extrémité, située initialement au point O (origine de l'axe Ax) est fixé un corps de masse $m = 1{,}5$ g assimilé à un point matériel (M) pouvant coulisser sans frottement sur Ax.

1°) On comprime le ressort (R) de $a = 4$ cm, (M) se trouve alors en un point N_o de Ax et on l'abandonne à $t = 0$ sans vitesse initiale.

a) Déterminer la nature du mouvement de (M) en appliquant le principe fondamental de la dynamique. En déduire la période de ce mouvement. La calculer.

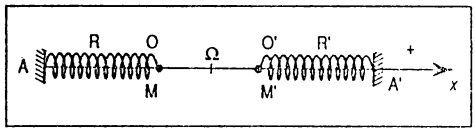
b) Etablir l'équation horaire du mouvement de (M), l'axe étant orienté comme l'indique la figure.

2°)a) Montrer que l'on peut déterminer la nature du mouvement de (M) en appliquant le théorème de la variation de l'énergie cinétique.

b) Evaluer le travail de la tension du ressort lorsque son extrémité passe du point N_o d'abscisse – 4 cm au point N_1 d'abscisse 2 cm. En déduire la vitesse de (M) au point N_1.

3°) On fixe en A' un deuxième ressort (R') identique à (R). (M') est un point matériel de masse $m' = m$. A l'équilibre (M) et (M') sont respectivement situés aux points O et O' de l'axe Ax.

Le ressort (R) est comprimé de 4cm à partir de O, le ressort (R') est comprimé de 3 cm à partir de O'.



A la date $t = 0$, les ressorts (R) et (R') sont abandonnés sans vitesse initiale.

a) Quand et où aura lieu la rencontre de (M) et (M')? Cette abscisse sera repérée par rapport à un point Ω tel que : $\overline{O\Omega} = \overline{\Omega O'} = 2$ cm.

b) En supposant le choc élastique entre (M) et (M'), calculer leurs vitesses respectives juste avant le choc et juste après le choc.

c) Ecrire l'équation horaire du mouvement après le choc de chacun des points (M) et (M') en prenant l'origine des dates l'instant juste après le choc.

Rép. Num.:

1°) a) $T_o = 6{,}28.10^{-2}$ s ; b) $x(t) = 4.10^{-2} \sin(100t - \frac{\pi}{2})$ (m).

2°) b) $W_{\vec{T}} = 9.10^{-3}$ J , $\|\vec{v}_1\| = 3{,}46$ m.s^{-1}.

3°) a) $t_{rencontre} = 2{,}18.\ 10^{-2}$ s , $X_{rencontre} = 0{,}288$ cm ;

b) $v_M = 3{,}28$ m.s^{-1}, $v_{M'} = -2{,}46$ m.s^{-1}, $v'_M = -2{,}46$ m.s^{-1}, $v'_{M'} = 3{,}28$ m.s^{-1} ;

c) $x(t) = 3{,}36.10^{-2} \sin(100t + 2{,}39)$ (m) , $x'(t) = 3{,}7.10^{-2} \sin(100t - 0{,}48)$ (m).

Exercice n°5 :

Un ressort de masse négligeable, à spires non jointives, de constante de raideur k, a pour longueur $L_o = 0{,}3$ m quand sa tension est nulle. Il est suspendu verticalement par une de ses extrémi- tés à un point fixe O. A l'autre extrémité, on accroche un solide (S) sous forme de disque de faible épaisseur, de masse m. Lorsque (S) est en équilibre, la longueur du ressort est L telle que $L - L_o = x_o$. La verticale $(O', \vec{i})$ est orientée positi- vement vers le bas (voir figure-1).

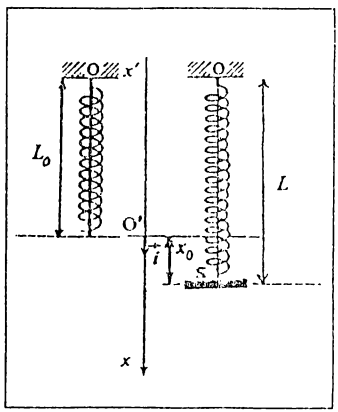


Fig-1

1°)a) (S) est mis en oscillations verticales autour de sa position d'équilibre.
Montrer que ces oscillations sont sinusoïdales.

b) Exprimer la période T_o de ces oscillations en fonction de x_o et de l'accélération de la pesanteur $\|\vec{g}\|$. Calculer T_o sachant que $x_o = L_o = 0{,}3$ m.

2°) L'ensemble { ressort, (S) } est en équilibre. Au point O est placé un anneau (S') de masse m' telle que $m' = \alpha .m$ (voir figure-2).

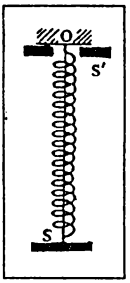


Fig-2

On lâche (S') sans vitesse initiale, celui-ci tombe alors en chute libre sans prendre contact avec le ressort. Le choc entre (S) et (S') est parfaitement mou et la vitesse $\vec{v}'$ de l'ensemble (S,S') juste après le choc est verticale :

a) Calculer la valeur de $\vec{v}_o$: vitesse de (S') juste avant le choc.

b) Exprimer la valeur de $\vec{v}'$ en fonction de α et $\|\vec{v}_o\|$.

La calculer pour $\alpha = \frac{1}{3}$.

c) Déterminer, pour la même valeur de α, l'amplitude du mouvement pris par l'ensemble (S,S').

d) Ecrire l'équation horaire de ce mouvement, en prenant comme origine des dates, l'instant juste après le choc et comme origine des espaces, la position d'équilibre de l'ensemble (S,S').

Rép. Num.: 1°) b) $T_o = 1{,}088$ s.

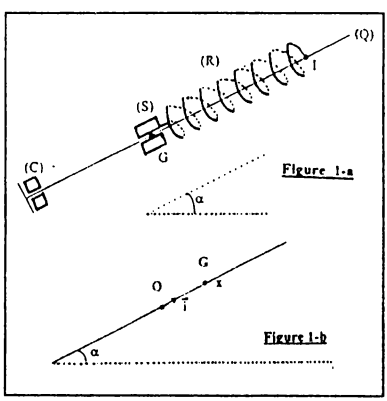
2°) a) $\|\vec{v}_o\| = 3{,}46$ m.s^{-1} ; b) $\|\vec{v}'\| = 0{,}865$ m.s^{-1} ;

c) $X_m = 0{,}2$ m ; d) $x(t) = 0{,}2\sin(5t - \frac{\pi}{6})$ (m).

Exercice n°6 :

PARTIE A/

Dans cette partie, on négligera tout les types de frottement. Une tige rigide (Q) est maintenue inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable, de longueur à vide l_o et de raideur $K = 80$ N.m^{-1} est enfilé le long de cette tige. Il est fixé à celle-ci par l'une de ses extrémités en un point noté I, son autre extrémité étant relié à un solide (S) de masse $M = 50$ g et de centre d'inertie G pouvant coulisser le long de la tige (figure-1-a). Lorsque (S) est dans sa position d'équilibre, son centre d'inertie G occupe la position O, origine du repère $(O,\vec{i})$, et la longueur de (R) est l ; le vecteur unitaire $\vec{i}$ est orienté suivant le côté ascendant de la ligne de plus grande pente du plan incliné (figure-1-b).



1°) Etablir la relation entre M, $\|\vec{g}\|$, K, α et $(l - l_o)$ lorsque G est à la position d'équilibre O.

2°) Un solide (C) de masse $m = \frac{M}{2}$, pouvant coulisser aussi le long de (Q) et disposé comme l'indique la figure-1-a, est lancé vers (S) qu'il atteint avec une vitesse $\vec{v}_C$. On notera $\vec{v}_o$ et $\vec{v}'_C$ les vitesses respectives de (S) et (C) tout juste après le choc supposé élastique et de durée négligeable.

En appliquant les lois de conservation au système {(S), (C)}, trouver l'expression de v_C en fonction de v_o, M et m. Calculer sa valeur sachant que $\|\vec{v}_o\| = 1{,}6\ \text{m.s}^{-1}$.

3°) Suite à ce choc, (S) se met en mouvement oscillatoire. On notera x l'abscisse de G, $v = \frac{dx}{dt}$ sa vitesse instantanée et $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ son accélération à un instant t quelconque au cours du mouvement.

a) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au solide (S) en mouvement, montrer que l'oscillateur mécanique constitué par (R) et (S) est harmonique.

b) Donner l'expression de l'énergie mécanique totale E du système {(R), (S), terre} en fonction de M, v, x, K, $(l - l_o)$, $\|\vec{g}\|$ et α. Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}K(l - l_o)^2$$

On supposera nulle l'énergie potentielle de pesanteur de ce système en O.

c) Trouver les valeurs des élongations x_A et x_B ($x_A > x_B$) des positions limites A et B entre lesquelles (S) oscille.

PARTIE B/

Le ressort (R) est maintenant remplacé par un autre ressort (R') de raideur K', et on suppose que le solide (S) est soumis à une force de frottement visqueux de la forme $\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$ où h est une constante positive. Les oscillations de (S) sont entretenues à l'aide d'une force supplémentaire $\vec{F} = F(t) \cdot \vec{i} = F_m \sin(\omega_e t) \cdot \vec{i}$ exercée à l'aide d'un dispositif approprié jouant le rôle d'excitateur. Dans ce cas, à tout instant t au cours du mouvement, l'élongation x de G, sa vitesse instantanée $v = \frac{dx}{dt}$ et son accélération $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ vérifient la relation : $M\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + K'x = F_m \sin(\omega_e t)$

dont la solution est $x(t) = X_m \sin(\omega_e t + \varphi_x)$.

Les fonctions $x(t)$ et $F(t)$ sont représentées par les diagrammes de la figure-2.

1°) Au cours de ces oscillations forcées, il y a échange d'énergie entre le résonateur {(R'),(S)} et l'excitateur. Préciser dans quel sens s'effectue-t-il et pourquoi ?

2°) A partir des diagrammes de la figure-2 :

a) Déterminer les expressions de $x(t)$ et $F(t)$. Préciser, en le justifiant, s'il existe des valeurs de la pulsation ω_e de la force excitatrice pour lesquelles le déphasage de $x(t)$ par rapport à $F(t)$ change de signe.

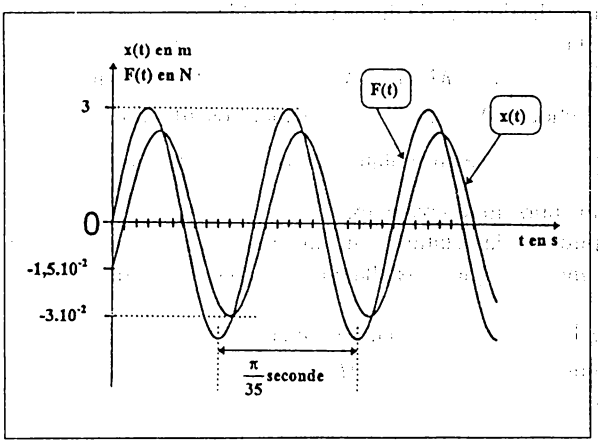


Fig-2

b) Faire la construction de Fresnel, et en déduire les valeurs de h et de K'.

3°)a) Donner l'expression de l'amplitude X_m en fonction de F_m, h, ω_e, K' et M. En déduire l'expression de l'amplitude V_m de la vitesse instantanée en fonction des mêmes données.

b) Déterminer le rapport $\frac{F_m}{V_m}$ en fonction de h, ω_e, K' et M. Déduire, à l'aide de l'analogie mécanique-électrique, l'expression correspondant à ce rapport en électricité et en donner la signification physique.

Rép. Num.: (Bac)

A/ 2°) $v_C = 2{,}4$ m.s^{-1}. 3°) c) $x = \pm\ 4.10^{-2}$ m.

B/ 2°) a) $x(t) = 3.10^{-2}\, sin(70t - \frac{\pi}{6})$ (m) et $F(t) = 3 sin(70t)$ (N);

c) $h = 0{,}714$ (SI) , $K' = 331{,}6$ N.m^{-1}.

Exercice n°7 :

Un solide (S) de masse m est attaché à l'une des extrémités d'un ressort vertical parfaitement élastique, de constante de raideur K et de masse négligeable devant celle du solide (S). L'extrémité supérieure du ressort est fixe. A l'équilibre, l'allongement du ressort est a_o.

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre vers le bas de y_o puis on le lâche sans vitesse initiale à un instant qu'on prend comme origine des dates.
On néglige les frottements et on étudie le mouvement du solide (S) relativement à un repère galiléen $(O, \vec{j})$ d'origine O, la position du centre d'inertie de (S) à l'équilibre et d'axe $O\vec{y}$, un axe vertical dirigé vers le bas (figure-1).

1°)a) A une date t quelconque, le centre d'inertie G de (S) a une élongation y et sa vitesse instantanée est v. Etablir l'expression de l'énergie mécanique E du système {(S), ressort, terre} en fonction de y, v, a_o, K et m.

On prendra comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur celle correspondant à la position du solide dans un plan horizontal passant par O, position du centre d'inertie du solide (S) à l'équilibre. On considère nulle l'énergie potentielle élastique du ressort non chargé.

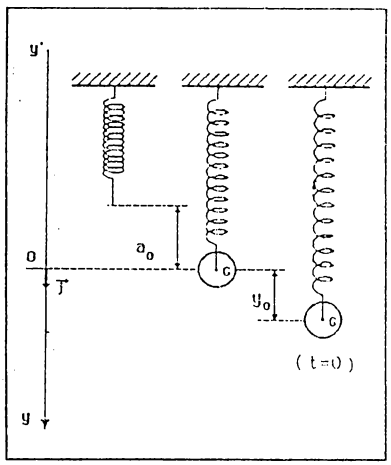


Fig-1

b) Montrer que cette énergie mécanique E est constante. Exprimer sa valeur en fonction de K, y_o et a_o.

c) En déduire que le mouvement de (S) est rectiligne sinusoïdal.

2°) A l'aide d'un dispositif approprié, on mesure la vitesse instantanée v du solide (S) pour différentes élongations y du centre d'inertie G de (S).

Les résultats des mesures ont permis de tracer la courbe $v^2 = f(y^2)$ (figure-2).

a) Justifier théoriquement l'allure de la courbe en établissant l'expression de v^2.

b) En déduire les valeurs de :
- la pulsation ω_o et l'amplitude y_o du mouvement de (S).
- l'allongement a_o du ressort à l'équilibre.

c) Etablir l'équation horaire du mouvement de (S).

d) Sachant que l'énergie mécanique E du système est égale à 0,625 Joule, calculer les valeurs de la constante de raideur K du ressort et la masse m du solide (S).

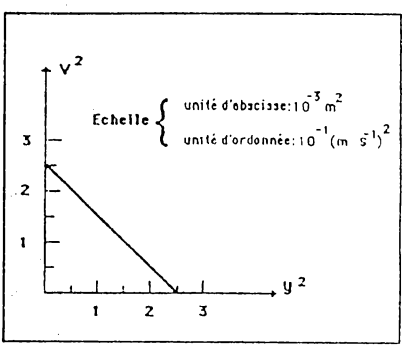


Fig-2

3°) On exerce maintenant sur le solide (S) une force $\vec{F} = F_m \sin(\omega t) \cdot \vec{j}$ dont la pulsation ω est réglable. Le solide (S) prend alors un mouvement sinusoïdal forcé d'équation : $y = y_m \sin(\omega t + \varphi)$.

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement de (S).

b) Pour quelles valeurs de la pulsation ω, les grandeurs y et F sont-elles :

- en phase ?
- en position de phase ?

c) Etablir l'expression de y_m en fonction de ω. Que se passe-t-il si $\omega = \omega_o$? Donner l'allure de la courbe $y_m = f(\omega)$.

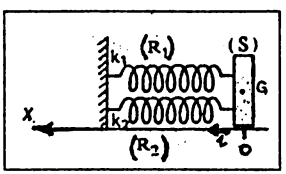
Rép. Num.: (Bac)

2°) b) $\omega_o = 10 \text{ rad.s}^{-1}$, $y_o = 5.10^{-2}$ m, $a_o = 0{,}1$ m ;

c) $y(t) = 5.10^{-2} \sin(10t + \frac{\pi}{2})$ (m) ; d) $K = 100 \text{ N.m}^{-1}$, $m = 1$ Kg.

Exercice n°8 :

Le dispositif de la figure ci-contre est constitué de deux ressorts (R_1) et (R_2) de constantes de raideur $k_1 = k_2 = k = 20 \text{ N.m}^{-1}$. Un solide (S) de centre de gravité G et de masse m = 400 g est fixé aux deux extrémités de (R_1) et (R_2).



On écarte le solide de sa position d'équilibre de $a_o = 2$ cm dans le sens positif des élongations et on l'abandonne sans vitesse initiale. Les forces de frottement sont équivalentes à une force unique $\vec{f} = -h.\vec{v}$ où h est une constante positive.

PARTIE A/

1°) Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur en appliquant la relation fondamentale de la dynamique.

2°) Donner, en conservant les mêmes conditions initiales, l'allure de la courbe représentant l'abscisse x de G en fonction du temps lorsque les frottements sont faibles mais non négligeables.

3°)a) Donner l'expression de l'énergie mécanique de l'oscillateur à un instant t et en déduire sa dérivée par rapport au temps.

b) Montrer que la variation de l'énergie mécanique pendant l'intervalle de temps dt est égale au travail élémentaire de la force de frottement.

c) Donner une interprétation énergétique de la courbe $x = f(t)$ précédente.

d) Après plusieurs oscillations, l'amplitude devient sensiblement égale à $a_n = 1$ cm, n désigne le nombre d'oscillations. Déterminer la valeur de n sachant que l'oscillateur perd $\frac{1}{16}$ de son énergie totale après chaque oscillation.

PARTIE B/

Le solide (S) est maintenant soumis en plus à une force excitatrice de la forme : $\vec{F} = F_m \cos(\omega t) \cdot \vec{i}$

1°) Donner l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur.

2°)a) Déterminer l'expression de X_m et de $tg\Phi$, sachant que la réponse du résonateur est de la forme : $x(t) = X_m \cos(\omega t - \Phi)$.

b) En déduire l'expression de V_m : valeur maximale de la vitesse du solide (S).

3°) Pour une valeur précise de la pulsation ω, on constate que la force excitatrice est en quadrature avance de phase sur l'élongation $x(t)$.

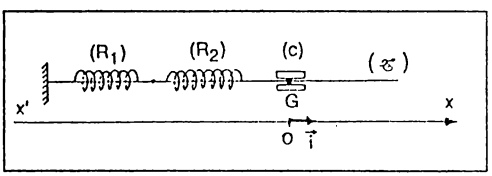
a) Quel est l'état d'oscillation du système ?

b) Déterminer alors le coefficient de frottement h.

On donne : $X_m = 4$ cm ; $F_m = 2$ N.

Rép. Num. : A/ 3°) d) $n = 21{,}5$ oscillations.
B/ 3°) b) $h = 5$ (SI).

Exercice n°9 :



Le dispositif de la figure ci-contre est constitué de :

- Deux ressorts (R_1) et (R_2) à spires non jointives enroulés sur une tige horizontale (T), de masses négligeables, de raideur $k_1 = 30$ N.m^{-1} et $k_2 = 60$ N.m^{-1} ; le point de soudure qui relie les deux ressorts est de masse négligeable.
- Un solide (C) de centre d'inertie G et de masse $m = 0{,}2$ Kg est fixé à l'extrémité libre du ressort (R_2) et pouvant coulisser sur la tige (T).

On écarte (C) de sa position d'équilibre dans le sens positif d'une distance égale à 6 cm et on lâche à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale de valeur 0,6 m.s^{-1} dans le sens positif.

L'origine O du repère $x'Ox$ correspond à la position d'équilibre de G.

1°) Montrer que les tensions des deux ressorts sont égales à chaque instant.

2°) Exprimer les déformations x_1 et x_2 des ressorts (R_1) et (R_2) en fonction de k_1, k_2 et de l'élongation x de G à l'instant t. Calculer x_1 et x_2 à instant $t = 0$.

3°)a) Exprimer l'énergie mécanique totale E du système{C, R_1, R_2 et terre} au cours du mouvement en fonction de m, k_1, k_2, x_1, x_2 et v, $(v = \frac{dx}{dt})$.

On supposera nulle l'énergie potentielle de pesanteur au niveau du plan horizontal contenant la tige (T).

b) En déduire l'expression de E en fonction de m, k_1, k_2, x et v ; montrer alors que l'ensemble des deux ressorts est équivalent à un ressort de raideur k dont

on déterminera la valeur.

4°)a) En supposant tous les frottements négligeables, montrer que le mouvement de G est rectiligne sinusoïdal de pulsation ω_o ; calculer ω_o .

b) Déterminer l'équation horaire du mouvement de G.

5°) Les oscillations du corps (C) relié au ressort équivalent de raideur k sont en fait amorties par des forces de frottement dont la résultante est de la forme $-h\cdot\vec{v}$ où h est une constante positive égale à 0,35 (SI). Un dispositif approprié permet d'entretenir ces oscillations en exerçant une force excitatrice de la forme : $\vec{F} = F_m\, sin(\omega t + \varphi)\cdot\vec{i}$

a) Etablir l'équation différentielle en x du second ordre relative au mouvement de G.

b) En admettant que le mouvement de G est rectiligne sinusoïdal de pulsation ω et d'élongation $x(t) = X_m\, sin(\omega t)$:

- Etablir, en utilisant la construction de Fresnel, l'expression de l'amplitude X_m en fonction de F_m, h, k, m et ω .

- En posant $\frac{h}{m} = \frac{1}{\tau}$, exprimer X_m en fonction de F_m, m, ω_o, ω et τ .

c) L'amplitude X_m est maximale pour une valeur ω_r de la pulsation ω ; établir l'expression de ω_r en fonction de ω_o et τ ; calculer ω_r .

Rép. Num. : (Bac)

2°) $x_1 = 4.10^{-2}$ m , $x_2 = 2.10^{-2}$ m .

3°) b) $k = 20$ N.m^{-1} ; 4°) a) $\omega_o = 10$ rad.s^{-1} ; b) $x(t) = 6.\sqrt{2}\, sin(10t + \frac{\pi}{4})$ (m).

5°) c) $\omega_r = 9{,}92$ rad.s^{-1} .

Exercice n°10 :

Un oscillateur formé d'un ressort de raideur $k = 250$ N.m^{-1} soudé à un solide (S) de masse $m = 50$ g, est soumis à une force de frottement $\vec{f} = -h.\vec{v}$ où h = 0,75 (SI) et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de (S). Le dispositif est horizontal, on soumet (S) à une force excitatrice sinusoïdale $\vec{F}$ telle que : $\vec{F}(t) = F_m\, sin(\omega t + \varphi_F)\cdot\vec{i}$, $\vec{i}$ dirige un axe horizontal.

1°) Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur en fonction de $v, \frac{dv}{dt}$ et $\int v\,dt$.

2°)a) Déterminer l'intensité maximale de la force excitatrice, sachant que : $v(t) = 4\, sin(16\pi t)$ exprimée en m.s^{-1} .

b) Déterminer le déphasage entre la vitesse et la force excitatrice : $\Delta\varphi = \varphi_v - \varphi_F$. En déduire l'expression de $F(t)$.

3°) Définir en utilisant l'analogie électromécanique, l'impédance mécanique, donner son expression et calculer sa valeur.
4°) Calculer la puissance mécanique moyenne dissipée par l'oscillateur.
5°) On remplace le solide (S) par un solide (S') de masse m', la force excitatrice étant inchangée. On constate que F et v sont en phase.

a) Calculer la masse m' du solide (S').

b) Déterminer l'expression de $v(t)$.

c) Calculer la puissance moyenne dissipée par l'oscillateur. Conclure.

Rép. Num.:
2°) a) $F_m = 10{,}3$ N ; b) $\Delta\varphi = 1{,}27$ rad. 3°) $Z_{mécanique} = 0{,}57$ (SI).
4°) $P_m = 6$ W. 5°) a) $m' \approx 0{,}1$ Kg ; c) $P_m = 70{,}7$ W.

Exercice n°11 :

Un pendule élastique, constitué d'un ressort linéaire de constante de raideur $k = 400$ N.m^{-1} et d'un solide (C) de masse $M = 20$ g, mis en oscillations forcées sinusoïdales par un moteur dont l'arbre est excentré, tournant à vitesse constante de fréquence réglable N (figure-1). Les forces de frottement visqueux agissant sur le solide (C) sont équivalentes à une force unique d'expression $\vec{f} = -h.\vec{v}$ où h est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse instantanée de (C). La force excitatrice exercée par le moteur et transmise par la poulie et le ressort, considérés de masse négligeable, au solide (C) est d'expression :

$$\vec{F}(t) = F_m \sin 2\pi N t \cdot \vec{j}$$

($\vec{j}$ dirige l'axe $y'y$ vertical d'origine confondue avec le point de soudure ressort-solide à l'équilibre).

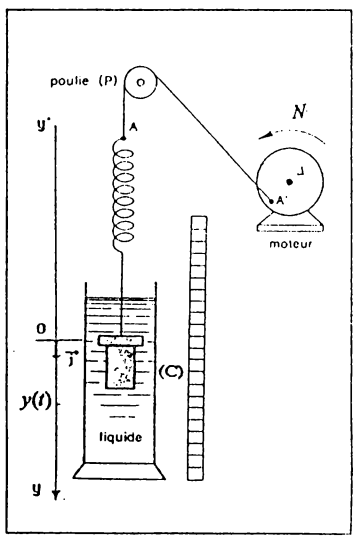


Fig-1

Le solide (C) prend alors un mouvement de translation rectiligne sinusoïdal d'élongation $y(t)$.

La figure-2 ci-dessous donne les variations de l'amplitude Y_m des oscillations de (C) en fonction de la fréquence N de la force excitatrice.

On rappelle que : $$Y_m = \frac{F_m}{\sqrt{4\pi^2 N^2 h^2 + (4\pi^2 N^2 M - k)^2}}$$

1°) Déterminer à partir de la représentation graphique de $Y_m = f(N)$:

a) La fréquence N_R de résonance d'élongation de l'oscillateur.

b) L'amplitude des oscillations de (C) pour : $N = 0$ Hz et $N = N_R$.

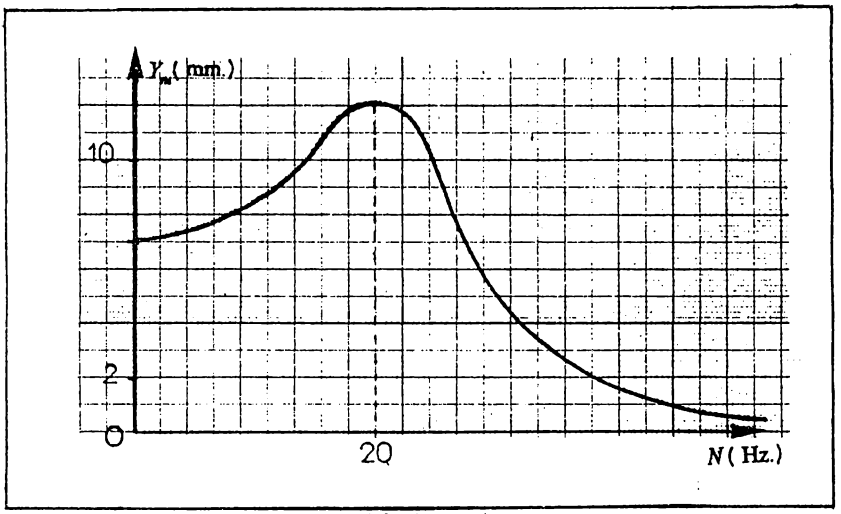


Fig-2

2°) Montrer que la fréquence de résonance N_R est liée à la fréquence propre de l'oscillateur par la relation : $N_R^2 = N_o^2 - \dfrac{h^2}{8\pi^2 M^2}$

3°) Déduire de tout ce qui précède :

a) La valeur de F_m .

b) La valeur de h.

c) L'expression numérique de $y(t)$ à la résonance d'élongation.

4°)a) Montrer qu'il existe une valeur du coefficient de frottement noté h_o au delà de laquelle il n'existe plus de résonance d'élongation. Déterminer h_o.

b) Représenter l'allure de la courbe $Y_m = f(N)$ pour : $h_1 < h$ (calculée précédemment) et $h_2 \geq h_o$.

Rép. Num. :

3°) a) $F_m = 2{,}8$ N ; b) $h = 1{,}83$ (SI) ; $y(t) = 12.10^{-3}\, sin(40\pi t - 1{,}22)$ (m).

4°) a) $h_o = 4$ (SI).

Exercice n°1 :

On charge un condensateur parfait de capacité C au moyen du circuit représenté sur la figure-1.

Le générateur de tension est de f.é.m E constante et de résistance nulle. Pendant la phase de charge, l'interrupteur K est alors placé dans la position (1). On décharge ensuite le condensateur dans une bobine purement inductive d'inductance L, en basculant à l'instant $t = 0$, l'interrupteur K dans la position (2).

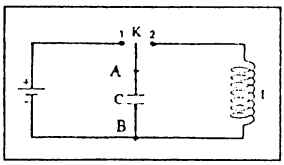


Fig-1

1°)a) Exprimer, à une date t quelconque, l'énergie électromagnétique W du circuit (L,C) en fonction de q charge de l'armature (A), C, L et $i(t)$: intensité du courant traversant la bobine.

b) En déduire l'équation différentielle de l'oscillateur ainsi que l'expression de sa solution.

2°) On donne sur les figures-2 et -3 les variations de l'énergie magnétique W_L de la bobine respectivement en fonction du temps et en fonction de l'intensité instantanée i du courant.

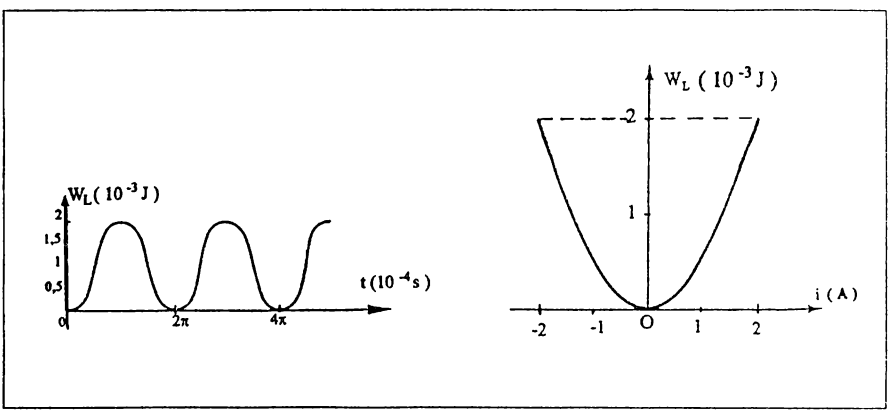


Fig-1 Fig-2

En exploitant les courbes représentatives de W_L déterminer la valeur de :

a) La pulsation propre ω_o de l'oscillateur.

b) L'inductance L de la bobine, la capacité C du condensateur et la valeur maximale Q_m de la charge.

c) La f.é.m E du générateur.

3°) Donner les expressions de $q(t)$, $i(t)$ et $u_C(t)$: tension aux bornes du condensateur.

4°) Compléter les figures-2 et -3 en traçant les courbes représentatives de l'énergie électromagnétique W et de l'énergie électrostatique W_C en fonction du temps et de i

Rép. Num. : 2°)a) $\omega_o = 5.10^3$ rad.s^{-1} ; b) $L = 10^{-3}$ H , $C = 40\ \mu$F , $Q_m = 4.10^{-4}$ C ;
c) $E = 10$ V.

3°) $i(t) = 2cos(5.10^3 t + \frac{\pi}{2})$ (A) ; $u_C(t) = 10sin(5.10^3 t + \frac{\pi}{2})$ (V).

Exercice n°2 :

On étudie les oscillations d'un circuit comportant :
- Un condensateur de capacité C préalablement chargé.
- Une bobine d'inductance L et de résistance négligeable.

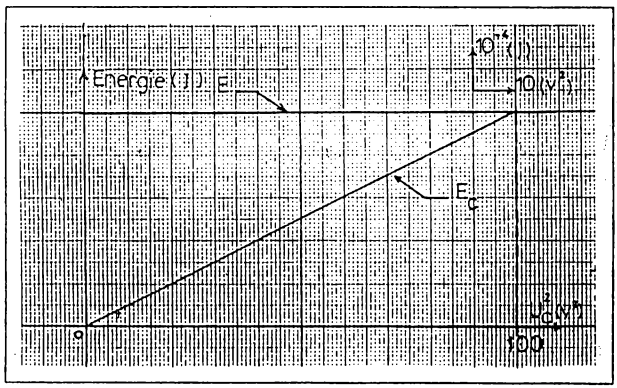
1°)a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension instantanée $u_C(t)$ existant entre les bornes du condensateur.

b) Donner l'expression de la fréquence propre N_o de cet oscillateur.

2°)a) Exprimer l'énergie totale E emmagasinée par le circuit en fonction de la tension $u_C(t)$ et de $\frac{du_C(t)}{dt}$.

b) Déduire que l'oscillateur est non amorti.

3°) On propose ci-dessous les représentations de l'énergie totale E et de l'énergie électrostatique E_C emmagasinée par le condensateur en fonction de u_C^2.



a) Déterminer l'amplitude $U_{C_{max}}$ de la tension $u_C(t)$.

b) Calculer la valeur de la capacité C du condensateur.

c) Calculer l'énergie magnétique E_L emmagasinée par la bobine pour $u_C = 5\sqrt{2}$ V. Comparer E_L et E_C.

4°) On prend L = 0,1 H. On choisit l'origine des temps de manière à exprimer $u_C(t)$ sous la forme : $u_C(t) = U_{C_{max}} \sin(\omega_o t)$.

a) Ecrire $u_C(t)$ en remplaçant les grandeurs $U_{C_{max}}$ et ω_o par leurs valeurs numériques.

b) Déterminer les expressions de la charge $q(t)$ et de l'intensité instantanée $i(t)$ en fonction du temps en précisant les valeurs numériques des différents paramètres.

c) Comparer les grandeurs $u_C(t)$, $q(t)$, $i(t)$ de point de vue déphasage.

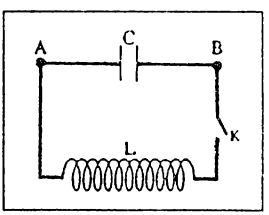
Rép. Num. :

3°) a) $U_{C_{max}} = 10$ V ; b) $C = 10\mu$F ; c) $E_L = 2{,}5.10^{-4}$ J.

4°) a) $u_C(t) = 10\sin(10^3 t)$ (V) ; b) $i(t) = 0{,}1\sin(10^3 t + \frac{\pi}{2})$ (A).

Exercice n°3 :

On réalise un circuit électrique à l'aide d'une bobine d'inductance L, de résistance négligeable et d'un condensateur de capacité $C = 1\mu$F préalablement chargé.



On ferme l'interrupteur K à la date $t = 0$.

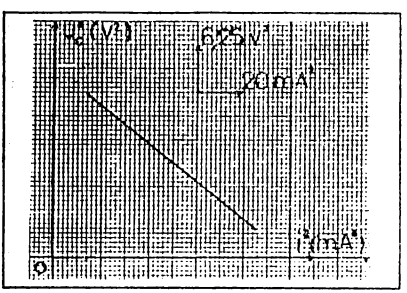
Soit $q(t)$ la charge de l'armature (A) à la date $t > 0$.

1°) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$.

2°) Donner l'expression de l'énergie électromagnétique E dans le circuit en fonction des grandeurs $q(t)$ et $i(t)$: intensité du courant dans le circuit à la date t.

Montrer que cette énergie reste constante au cours du temps.

3°) On donne la courbe $u_C^2 = f(i^2)$ où u_C est la tension instantanée aux bornes du condensateur.



a) Justifier l'allure de cette courbe.

b) En déduire L et E.

4°) Exprimer numériquement $q(t)$ et $i(t)$. Représenter sur le même graphe les courbes $q = f(t)$ et $i = g(t)$.

Rép. Num.:

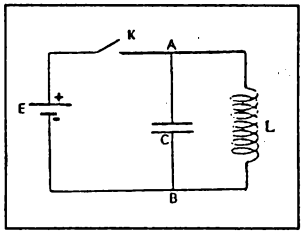
3°) b) $L = 0{,}25$ H , $E = 12{,}5.10^{-6}$ J.

4°) $q(t) = 5.10^{-6}\sin(2.10^3 t + \frac{\pi}{2})$ (C), $i(t) = 10^{-2}\sin(2.10^3 t + \pi)$ (A).

Exercice n°4 :

On considère le circuit de la figure ci-contre :

Un générateur de tension continue de f.é.m E et de résistance interne r alimente, lorsque l'interrupteur (K) est fermé, deux dipôles montés en parallèles : l'un est un condensateur de capacité C, l'autre est une bobine d'inductance L et de résistance négligeable.



1°)a) Montrer que la tension aux bornes de la bobine est nulle.

b) Calculer alors l'intensité I_o du courant traversant le générateur. En déduire les intensités des courants traversant chaque dipôle.

On notera I_C et I_L ces deux intensités.

c) Calculer l'énergie magnétique E_L et électrostatique E_C respectivement stockée par la bobine et le condensateur.

On donne : $E = 10$ V ; $r = 4\ \Omega$; $L = 1$ H ; $C = 2\ \mu$F.

2°) On ouvre l'interrupteur à la date $t = 0$, le circuit (L,C) est alors coupé du générateur. Etablir l'équation différentielle qui permet de déterminer l'intensité du courant $i(t)$ dans le circuit.

En déduire l'expression numérique de $i(t)$.

Rép. Num.: 1°) b) $I_o = 2{,}5$ A ; c) $E_L = 3{,}125$ J , $E_C = 0$ J.

2°) $i(t) = 2{,}5\sin(707t - \frac{\pi}{2})$ (A).

Exercice n°5 :

PARTIE A/

Un circuit électrique est constitué d'un générateur de f.é.m $E = 6$ V et de résistance interne négligeable, d'un condensateur de capacité $C = 1\ \mu$F, d'une bobine d'inductance $L = 1$H et de résistance négligeable et de deux interrupteurs (K_1) et (K_2) comme le montre la figure-1.

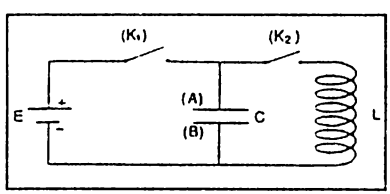


Fig-1

1°) Première expérience : (K_1) est fermé, (K_2) est ouvert sachant que la charge Q_o acquise par le condensateur est donnée par la relation $Q_o = C\,E$:

- Calculer Q_o.
- Exprimer l'énergie électrique W emmagasinée par le condensateur en fonction de E et C, la calculer.

2°) Deuxième expérience : A l'instant $t = 0$, on ouvre (K_1) et on ferme (K_2).
Etablir l'équation différentielle décrivant les variations de la charge instantanée $q(t)$ de l'armature (A) du condensateur en fonction du temps et en déduire l'expression de $q(t)$.

PARTIE B/

Le condensateur et la bobine précédents sont placés en série avec un résistor de résistance R (figure-2). On applique aux bornes de ce circuit une tension alternative $u(t) = U\sqrt{2}\,sin(2\pi f t + \varphi)$, de valeur efficace U constante et égale à 100 V.

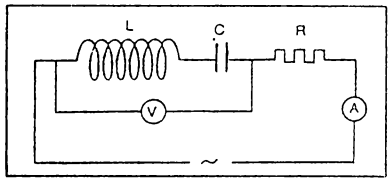


Fig-2

1°) En faisant varier la fréquence f, le voltmètre (V) indique une tension nulle pour une valeur f_o de f; l'ampèremètre (A) indique alors une intensité efficace $I_o = 2$ A.

a) Interpréter l'indication du voltmètre (V) et en déduire la valeur de f_o.

b) Calculer la valeur de la résistance R.

c) Calculer le facteur de surtension Q du circuit.

2°) On ajuste la fréquence à une nouvelle valeur différente de f_o.

a) Etablir l'équation différentielle en q de l'oscillateur forcé (R, L, C).

b) Sachant que $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} = I\sqrt{2}\,sin(2\pi f t)$, et que $f = f_1 = 162$ Hz, déduire à partir de la construction de Fresnel :

- le déphasage φ de la tension $u(t)$ par rapport au courant $i(t)$ en précisant si le circuit est inductif ou capacitif.
- l'intensité efficace I_1 du courant.

c) Calculer la puissance moyenne consommée dans le circuit.

Rép. Num.: (Bac)

A/ 1°) $Q_o = 6.10^{-6}$ C ; $W = 1{,}8.10^{-5}$ J. 2°) $q(t) = 6.10^{-6}\,sin(10^3 t + \dfrac{\pi}{2})$ (C).

B/ 1°) a) $f_o = 159$ Hz ; b) $R = 50\ \Omega$; c) $Q = 20$.

2°) b) $\varphi = 0{,}61$ rad , $I_1 = 1{,}64$ A ; c) $P = 134{,}5$W.

Exercice n°6 :

PARTIE A/

On réalise le montage expérimental schématisé sur la figure-1.
Données : $C = 1\ \mu$F ; (G) est un générateur idéal de f.é.m $E = 10$ V et de résistance interne négligeable.

1°) (K_2) est ouvert et (K_1) est fermé : après une brève durée, la plaque (A) porte la charge maximale Q_o et l'énergie emmagasinée par le condensateur est W_o. Calculer Q_o et W_o.

2°) On ouvre (K_1) et on ferme (K_2) à une date $t = 0$.

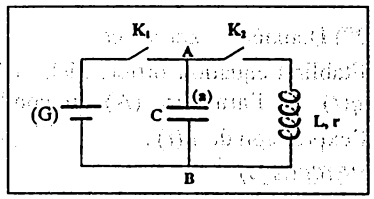


Fig-1

A l'aide d'un système d'acquisition adéquat, nous obtenons la courbe représentant les variations de la tension $u_{AB}(t)$ entre les bornes du condensateur en fonction du temps, (figure-2).

Cette courbe montre que le circuit est le siège d'oscillations faiblement amorties.

La tension $u_{AB}(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2u_{AB}(t)}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{du_{AB}(t)}{dt} + \omega_o^2 u_{AB}(t) = 0$$

où ω_o est la pulsation propre de l'oscillateur libre non amorti (L, C) telle que $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$.

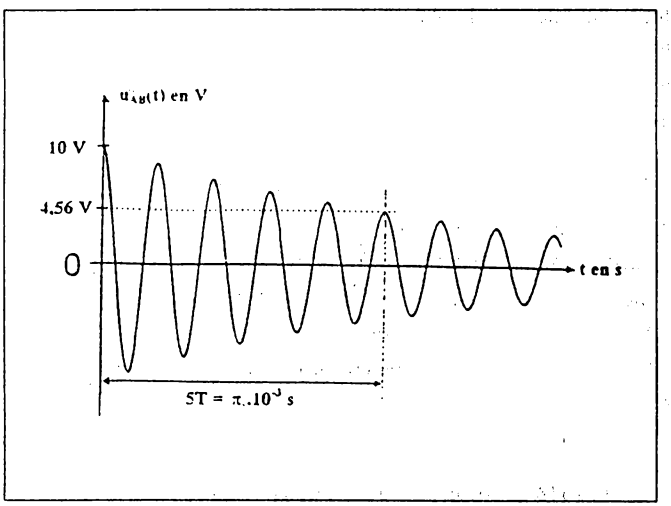


Fig-2

a) Quelle serait cette équation si on élimine le facteur d'amortissement ?

b) Déduire, à partir de la figure-2, la valeur moyenne de la pseudo-période de la décharge oscillante en utilisant l'intervalle de temps correspondant à 5 oscillations.

c) Déterminer la valeur de l'inductance L de la bobine en admettant que la pseudo-période est donnée par la même expression que la période propre du dipôle (L, C).

d) Calculer la perte d'énergie par effet Joule subie par l'oscillateur libre amorti (r, L, C) entre $t = 0$ et $t = \pi.10^{-3}$ s.

PARTIE B/

On réalise un second circuit électrique schématisé sur la figure-3 et comportant un générateur BF délivrant une tension sinusoïdale : $u(t) = U_m \sin(2\pi f t)$ d'amplitude U_m constante et de fréquence f variable, aux bornes duquel sont disposés en série, le condensateur de capacité $C = 1\ \mu F$, une bobine de résistance r et d'inductance L=0,01H et un résistor de résistance R.

On se propose de visualiser sur l'écran d'un oscilloscope à deux voies :

- la tension $u(t)$ ⟶ voie (1)
- la tension $u_R(t)$ ⟶ voie (2)

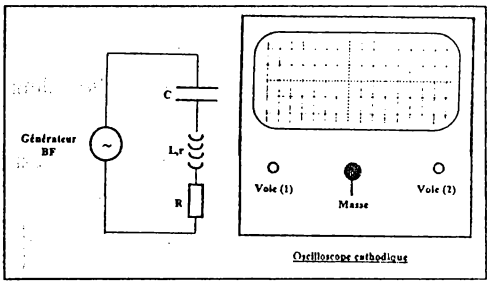


Fig-3

1°) Etablir, à l'aide d'un tracé clair, les connexions nécessaires entre le circuit électrique de la figure-3 et l'oscilloscope.

2°) Etablir l'équation reliant i, sa dérivée première $\frac{di}{dt}$ et sa primitive $\int i dt$.

Soit $i(t) = I_m \sin(2\pi f t + \varphi_i)$ la solution de cette équation.

3°)a) Première expérience :

On ajuste la fréquence f à la valeur f_o correspondant à la fréquence propre du dipôle (L, C). On obtient les diagrammes de la figure-4.

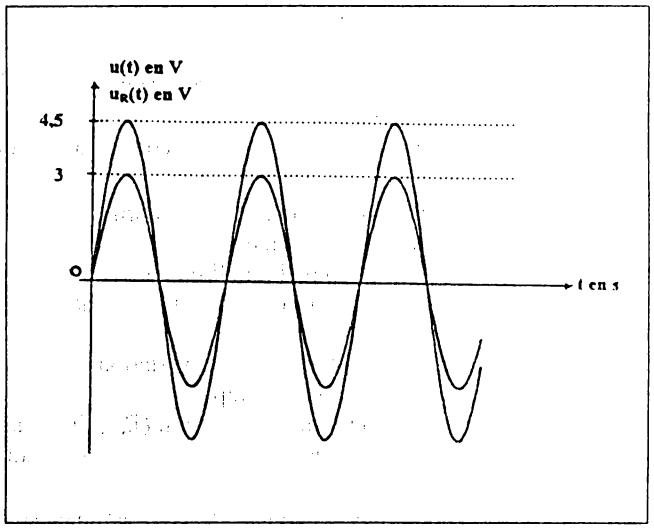


Fig-4

α) Montrer que, parmi les deux signaux qui constituent cette figure, celui ayant l'amplitude la plus élevée correspond à la tension $u(t)$.

β) Etablir que $\frac{R}{R+r}=\frac{2}{3}$.

b) Deuxième expérience : A partir de cette valeur f_o, on fait varier la fréquence f de la tension excitatrice $u(t)$ jusqu'à rendre cette dernière déphasée de $-\frac{\pi}{6}$ rad par rapport au courant $i(t)$. La nouvelle valeur de la fréquence est alors :

$f_1 = 1524$ Hz.

α) Dire, en le justifiant, si le circuit est inductif ou capacitif.

β) Faire la construction de Fresnel en tenant compte des données de cette 2ème expérience et montrer que $R+r=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2\pi f_1 C}-2\pi f_1 L\right)$.

γ) Calculer R et r.

c) Déterminer le facteur de qualité Q de cet oscillateur.

Rép. Num. : (Bac)

A/ 1°) $Q_o = 10^{-5}$ C , $W_o = 5.10^{-5}$ J. 2°) c) $L = 10^{-2}$ H ; d) $|\Delta W| = 3{,}96.10^{-5}$ J.

B/ 3°) b) $R = 10\ \Omega$, $r = 5\ \Omega$; c) $Q = 6{,}7$.

Exercice n°7 :

On dispose d'un condensateur de capacité $C = 25\ \mu$F et d'une bobine d'inductance $L = 0{,}25$ H et de résistance $R = 10\ \Omega$.

PARTIE A/

1°) Pour charger le condensateur, on le soumet à une tension $U_o = 100$ V délivrée par un générateur de courant continu.

Déterminer la charge Q_o prise par l'armature (A) du condensateur reliée au pôle positif du générateur.

2°) Le condensateur étant chargé, on le branche aux bornes de la bobine. Des oscillations pseudo-périodiques prennent naissance dans le circuit réalisé. L'amortissement entraîne une diminution de l'amplitude.

a) Calculer la pseudo-période T sachant qu'on peut la confondre avec la période propre de l'oscillateur utilisé.

b) Donner l'allure de la courbe représentant les variations de la charge q de l'armature (A) du condensateur en fonction du temps.

3°) Etablir, par application de la loi des mailles au circuit (R,L,C) utilisé, l'équation différentielle régissant les variations de la charge q de l'armature (A) du condensateur.

4°)a) Rappeler les expressions des énergies E_e et E_m emmagasinées respectivement par le condensateur et la bobine, à une date t quelconque.

b) Montrer que $\frac{dE}{dt} = -Ri^2$ où E désigne l'énergie totale de l'oscillateur et i désigne l'intensité instantanée du courant. En déduire une explication de la diminution de l'amplitude des oscillations libres du système.

PARTIE B/

On branche maintenant le même oscillateur (R,L,C) aux bornes d'un générateur délivrant une tension $u(t)$ sinusoïdale de fréquence N réglable :

$$u(t) = 6sin(2\pi Nt)$$

1°) Etablir l'équation différentielle régissant les variations de la charge q de l'armature (A) du condensateur.

2°) Montrer que $\frac{dE}{dt} = ui - Ri^2$, où E désigne l'énergie totale de l'oscillateur et i désigne l'intensité instantanée du courant.

En déduire que E prend à la résonance d'intensité une valeur constante que l'on calculera.

3°) Ecrire l'expression de la charge q à la résonance d'intensité en précisant les valeurs numériques de chaque paramètre.

Rép. Num. : (Bac)

A/ 2°) a) $T \approx 1{,}57.10^{-2}$ s.

B/ 2°) $E = 4{,}5.10^{-2}$ J. 3°) $q(t) = 1{,}5.10^{-3} sin(400t - \frac{\pi}{2})$ (C).

Exercice n°8 :

Le circuit électrique de la figure-1 comporte:
- Un condensateur de capacité C.
- Une bobine d'inductance L et de résistance propre r.
- Un résistor de résistance R.

Ce circuit est alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence f variable et de valeur efficace U_{AD}.

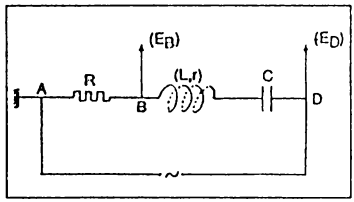


Fig-1

Les entrées (E_B) et (E_D) de l'oscillographe bicourbe et sa masse sont connectés respectivement aux points B, D et A .

1°) Pour une valeur f_o de la fréquence f, on obtient les oscillogrammes de la figure-2.

a) Préciser, en le justifiant, l'état d'oscillation du circuit.

b) Déterminer la valeur de f_o.

c) Indiquer, en le justifiant, celui des deux oscillogrammes (1) ou (2) qui correspond à la tension $u_{AB}(t)$; déduire la valeur de r sachant que $R = 2\ \Omega$.

d) Calculer alors la valeur I_o de l'intensité efficace du courant.

2°) Le facteur de surtension (ou de qualité) du circuit est $Q = 50$.

a) Déterminer L et C.

b) Calculer P_o la puissance consommée dans le circuit.

(Bac)

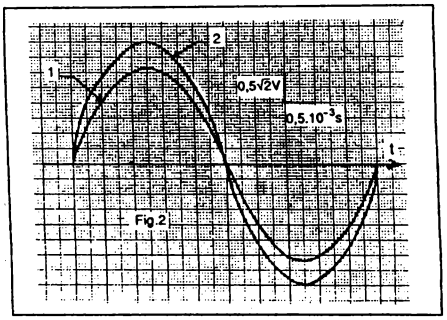


Fig-2

Rép. Num.:

1°) b) $f_o = 200$ Hz ; c) $r = 0{,}5\ \Omega$;

d) $I_o = 0{,}8$ A. 2°) a) $L = 0{,}1$ H ,

$C = 6{,}36\ \mu$F ; b) $P_o = 1{,}6$ W.

Exercice n°9 :

On considère une portion de circuit (AB), comportant en série, un résistor de résistance $r = 40\ \Omega$, une bobine de résistance $R = 20\ \Omega$ et d'inductance $L = 0{,}5$ H et un condensateur de capacité C variable.

On établit entre les bornes A et B de la portion de circuit une tension sinusoïdale de fréquence $N = 50$ Hz. La puissance moyenne consommée dans cette portion est égale à 15 W.

1°) Calculer l'intensité efficace du courant.

2°) Les tensions efficaces U_1 aux bornes du résistor et U_2 aux bornes de l'ensemble bobine et condensateur sont égales ; calculer dans ces conditions :

a) Le déphasage entre l'intensité instantanée i_{AB} et la tension instantanée u_{AB} aux bornes de la portion du circuit (AB).

b) La tension efficace U_{AB}.

c) Les valeurs de la capacité du condensateur ; représenter les constructions de Fresnel correspondantes.

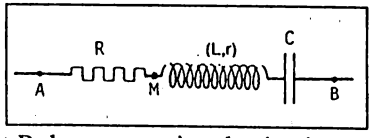
Rép. Num. : (Bac)

1°) $I = 0{,}5$ A.

2°) a) $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{6}$ rad ; b) $U_{AB} = 34{,}6$ V ; c) $C_1 = 16{,}6\ \mu$F , $C_2 = 26\ \mu$F .

Exercice n°10 :

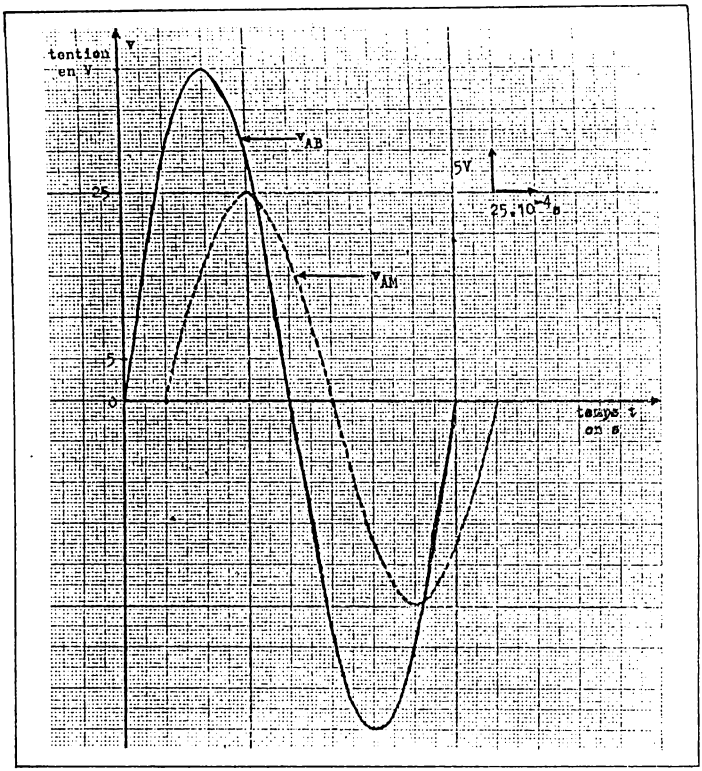
Une portion de circuit AB comprend en série : un résistor de résistance $R = 20\ \Omega$, une bobine de résistance r et d'inductance L et un condensateur de capacité $C = 20.10^{-6}\ F$.



Un générateur maintient, entre les bornes A et B de cette portion de circuit, une tension alternative sinusoïdale v_{AB} de fréquence N.

Sur l'écran d'un oscillographe bicourbe, on observe simultanément les deux courbes $v_{AM} = g(t)$ et $v_{AB} = h(t)$ représentées comme suit, selon l'échelle :

* Sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 25.10^{-4} s.
* Sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour 5 V.



1°)a) Déterminer la période T et la fréquence de la tension v_{AB}.

b) L'intensité instantanée du courant i qui parcourt le circuit est-elle en avance ou en retard par rapport à la tension v_{AB} ? Justifier la réponse. Quelle est la valeur de ce déphasage ?

2°)a) Trouver les expressions de la tension instantanée v_{AB} et de l'intensité instantanée du courant i qui parcourt le circuit.

b) Calculer l'impédance du circuit (AB).

c) Calculer r et L.

3°) Le condensateur est à capacité variable. Pour quelle valeur C_o de la capacité, l'intensité efficace du courant est-elle maximale ? Calculer sa valeur I_o. Donner alors les expressions de la tension instantanée v_{AB} et de l'intensité i.

Rép. Num.:

1°) a) $T = 2.10^{-2}$ s , $N = 50$ Hz ; b) $\varphi_i - \varphi_u = -\frac{\pi}{4}$ rad.

2°) a) $v_{AB}(t) = 40sin(100\pi t)$ (V) , $i(t) = 1{,}25sin(100\pi t - \frac{\pi}{4})$ (A) ;

b) $Z_{AB} = 32\ \Omega$; c) $r = 2{,}63\ \Omega$, $L = 0{,}57$ H.

3°) $C_o = 17{,}77\ \mu$F , $I_o = 1{,}25$ A,

$v_{AB}(t) = 40sin(100\pi t)$ (V) , $i(t) = 1{,}25\sqrt{2}\,sin(100\pi t)$ (A).

Exercice n°11 :

PARTIE A/

Une étude expérimentale d'un oscillateur (*R,L,C*) série en régime sinusoïdal forcé fournit la courbe de la figure-1 représentant l'intensité efficace *I* du courant électrique en fonction de la fréquence *N* de la tension d'alimentation *u* et la figure-2 représentant le déphasage φ de l'intensité *i* du courant par rapport à la tension *u* en fonction de *N*.

On donne : $u(t) = 24\sqrt{2}\,sin(2\pi Nt)$ en V, *t* en s.

A partir de ces deux graphiques :

1°)a) Déterminer la fréquence propre N_o du résonateur (*R,L,C*) série, l'intensité efficace I_o et le déphasage φ_o de l'intensité *i* à la résonance.

b) Ecrire l'expression de *i* à la résonance.

c) Calculer la résistance *R* du circuit.

2°) Lorsque $N = 40$ Hz :

a) Déterminer l'intensité efficace *I* et le déphasage φ.

b) Donner l'expression de *i*.

3°) Préciser comment vibre *i* par rapport à *u* dans le cas où *N* est inférieur à N_o et dans le cas où *N* est supérieure à N_o.

PARTIE B/

1°) Montrer que l'équation différentielle de l'oscillateur (*R,L,C*) en régime sinusoïdal forcé s'écrit sous la forme : $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_m\,sin(\omega t)$

avec *q* : charge du condensateur.

ω : pulsation de la tension d'alimentation *u*.

2°) En admettant que la charge du condensateur est de la forme :

$$q(t) = Q_m\,sin(\omega t + \varphi')$$

avec : Q_m : charge maximale et φ' : déphasage de *q* par rapport à *u*.

a) Faire les constructions de Fresnel relatives aux deux cas suivant :

- circuit capacitif $\frac{1}{C\omega} > L\omega$ - circuit inductif $\frac{1}{C\omega} < L\omega$

Fig-1

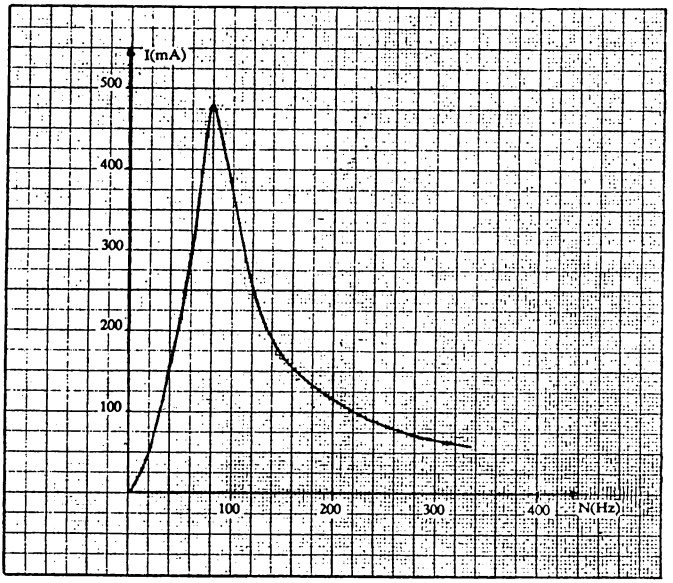
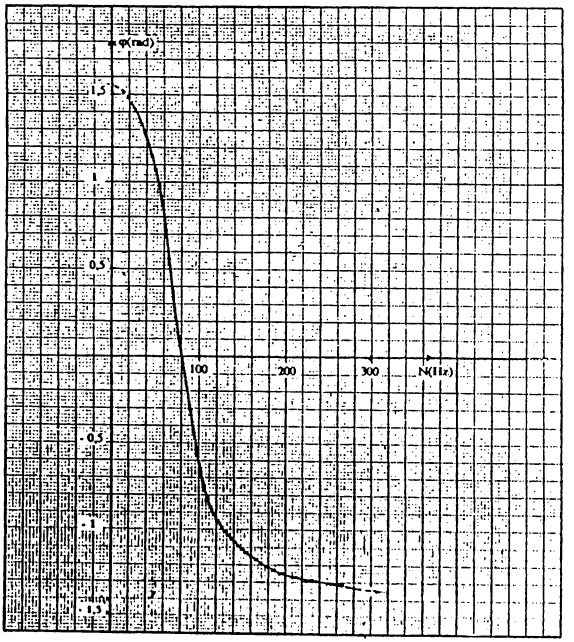

I(mA)
500
400
300
200
100
100
200
300
400
N(Hz)

Fig-2


φ(rad)
1,5
1
0,5
100
200
300
N(Hz)
-0,5
-1
-1,5

b) Déduire des constructions de Fresnel si la charge q du condensateur varie au cours du temps en avance de phase ou bien en retard de phase par rapport à la tension excitatrice .

3°) Déduire par analogie comment vibre un résonateur mécanique par rapport à son excitateur.

Rép. Num.: (Bac)

1°) a) $N_o = 80$ Hz , $I_o = 480$ mA , $\varphi_o = 0$ rad ;

b) $i(t) = 480\sqrt{2}\,sin(160\pi t)$ (mA) ; c) $R = 50\,\Omega$.

2°) a) $I = 150$ mA , $\varphi = 1{,}25$ rad ; b) $i(t) = 150\sqrt{2}\,sin(80\pi t + 1{,}25)$ (mA).

Exercice n°12 :

Un expérimentateur se propose de déterminer les valeurs de différentes caractéristiques d'un dipôle (R,L,C) en étudiant les résultats d'une série de mesures de puissance P moyenne consommée par le dipôle.

1°) Ce dipôle (R,L,C) comprend, disposé en série, un résistor de résistance $R_1 = 1{,}5\ \Omega$; une bobine de résistance R_2, d'inductance L et un condensateur de capacité C.

A l'aide d'un générateur BF, on maintient entre les bornes du dipôle une tension sinusoïdale $u(t)$ de fréquence f, de valeur efficace $U = 2{,}8$ V.

On obtient le tableau de mesures suivant :

f(Hz)	450	460	470	480	490	500	510	520	530	540	550
P (W)	0,40	0,56	0,78	1,08	1,39	1,56	1,39	1,12	0,80	0,60	0,46

a) Exprimer la puissance moyenne consommée par chaque élément du dipôle (R,L,C).

b) En déduire que la puissance moyenne consommée par le dipôle (R,L,C) l'est uniquement par effet Joule.

2°)a) Représenter à partir du tableau de mesures la courbe de P en fonction de f.

Echelle : 1 cm pour 10 Hz en abscisse.

1 cm pour 0,1 W en ordonnée.

Les deux axes se coupent au point (400 Hz , 0 W).

b) Donner la valeur de f_o pour laquelle la puissance est maximale et prend la valeur $P = P_o$ que l'on précisera. Que peut-on alors dire de l'état d'oscillation du circuit (R,L,C).

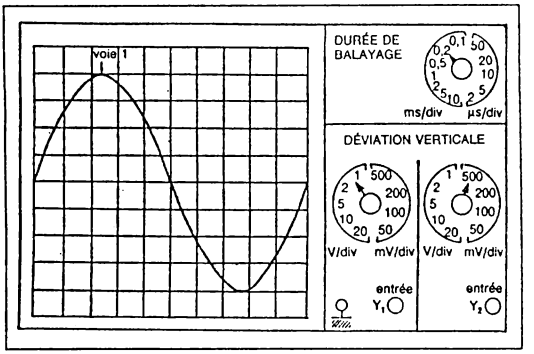
3°) Calculer les valeurs de R_2, L et C sachant que le facteur de qualité $Q = 8{,}2$.

4°) Pendant les mesures de puissance, un oscillographe bicourbe permet de suivre en même temps les variations de tensions :

- aux bornes du générateur en voie (1),
- aux bornes du résistor de résistance R_1 en voie (2).

a) Préciser sur un schéma les branchements vers l'oscillographe.

b) Quelle est la fréquence du générateur déterminée sur l'oscillogramme (voir figure).



c) Compléter dans ces conditions l'oscillogramme sur la figure en représentant la courbe obtenue en voie (2). Justifier les calculs.

Rép. Num.:

2°) b) $f_o = 500$ Hz , $P_o = 1{,}56$ W.

3°) $R_2 = 3{,}52\ \Omega$, $L = 1{,}3.10^{-2}$ H , C = 7,7 μF

4°) $f = f_o$

Exercice n°13 :

On considère une portion de circuit constituée d'une bobine d'inductance L et de résistance R en série avec un condensateur de capacité $C = 5\ \mu$F.

Ce circuit est branché aux bornes d'un générateur BF délivrant une tension de fréquence f variable : $u(t) = U_m \sin(2\pi f t + \frac{\pi}{2})$ (V).

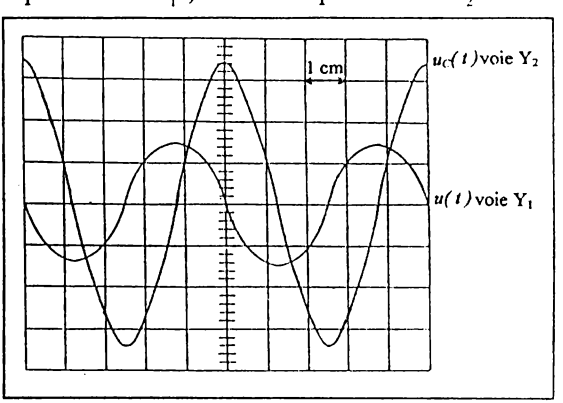
On étudie la tension $u(t)$ et la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur à l'aide d'un oscillographe bicourbe. Pour une fréquence f_o, on observe sur l'écran les courbes de la figure ci-dessous.

Base de temps : 2.10^{-3} s.cm^{-1}.

Sensibilité verticale : 2 V.cm^{-1} pour la voie Y_1 ; 20 V.cm^{-1} pour la voie Y_2.

1°) Faire un schéma du circuit en indiquant les branchements à réaliser pour obtenir ces courbes sur l'écran de l'oscillographe.

2°) Déterminer les grandeurs suivantes : fréquence f_o, tension U_m, tension U_{C_m} et le déphasage $\Delta\varphi_1$ de la tension $u_C(t)$ par rapport à $u(t)$.



3°) En déduire le déphasage $\Delta\varphi$ entre $u(t)$ et $i(t)$ intensité du courant dans le circuit.
Quel est l'état du circuit ? Déterminer la valeur de l'inductance L de la bobine.
4°) Calculer le facteur de surtension du circuit.
5°) En déduire la valeur de R et l'expression numérique de $i(t)$.
6°) Montrer que l'énergie W_o emmagasinée dans le circuit est constante.
7°) Calculer l'énergie moyenne W_1 dissipée par effet Joule pendant une période.
Déterminer le rapport $\frac{W_o}{W_1}$ et donner son expression en fonction du facteur de qualité du circuit.
Rép. Num. :
2°) $f_o = 100$ Hz , $U_m = 3$ V , $U_{C_m} = 68$ V , $\Delta\Phi_1 = -\frac{\pi}{2}$ rad .
3°) $\Delta\Phi = 0$ rad , $L = 0{,}5$ H. 4°) $Q = 22{,}7$.
5°) $R \approx 14\ \Omega$, $I_m = 214$ mA , $i(t) = 0{,}21 sin(200\pi t + \frac{\pi}{2})$ (A).
7°) $W_1 = 3{,}2.10^{-3}$ J.

Exercice n°14 :

Un dipôle D comprend, en série, un condensateur de capacité C et une bobine de résistance r et d'inductance L.
On se propose de déterminer les caractéristiques de ce dipôle.
1°) Dans une première expérience, on place en série avec le dipôle D, un résistor de résistance $R = 60\ \Omega$. L'ensemble S est alimenté par une source de tension alternative sinusoïdale de fréquence f variable.
On mesure les tensions efficaces aux bornes du résistor, aux bornes du dipôle D et aux bornes de l'ensemble S.
On trouve respectivement : $U_R = 6$ V ; $U_D = 4$ V ; $U_S = 10$ V.
a) Montrer que , dans ces conditions, le circuit est le siège d'une résonance d'intensité .
b) Déterminer alors la résistance r de la bobine.
2°) Dans une seconde expérience, on enlève le résistor et on alimente le dipôle D par la même source de tension. Pour une valeur $f_o = 100$ Hz de la fréquence f, on constate que les tensions efficaces aux bornes du condensateur, aux bornes de la bobine et aux bornes du dipôle sont égales. Déterminer L et C.
Rép. Num. : (Bac)
1°) b) $r = 40\ \Omega$. 2°) $L = 3{,}68.10^{-2}$ H ; $C = 34{,}4\ \mu$F.

Exercice n°15 :

On considère un circuit électrique comportant en série une bobine (B) de résistance R d'inductance L et un condensateur de capacité C. On alimente ce circuit par un courant alternatif sinusoïdal d'intensité instantanée i exprimée en ampère : $i(t) = \sqrt{2}\,sin(314t)$.

Des mesures expérimentales donnent les résultats suivants :

- La tension efficace aux bornes du circuit est : $U = 141{,}4$ V
- La tension efficace aux bornes du condensateur est : $U_C = 50$ V
- La tension instantanée aux bornes du circuit est en avance de phase de $\frac{\pi}{4}$ rad sur l'intensité instantanée du courant dans le circuit.

1°) Représenter, à l'échelle, sur papier millimétré les vecteurs de Fresnel correspondant aux tensions, aux bornes du circuit et aux bornes du condensateur. On prendra : 1 cm pour 10 V.

2°)a) Déterminer graphiquement la valeur de la tension U_B aux de la bobine (B).

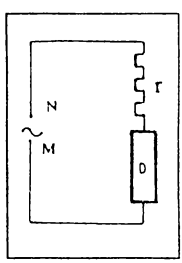
b) Exploiter le diagramme de Fresnel pour déterminer les valeurs de l'inductance L et de la résistance R de la bobine.

Rép. Num. : (Bac)

2°) a) $U_B = 180$ V ; b) $R = 100\ \Omega$, $L = 0{,}48$ H.

Exercice n°16 :

Une source de courant alternatif sinusoïdal de pulsation ω variable maintient entre les bornes M et N d'un circuit électrique une tension efficace $U = 125$ V. Ce circuit comprend en série entre M et N, un résistor de résistance $r = 50\ \Omega$ et un dipôle D inductif formé d'une bobine (R, L) et un condensateur de capacité C (voir figure). On posera $X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$.



1°) Calculer la valeur de l'intensité efficace du courant I dans le circuit.

On donne les tensions efficaces : $U_D = 80$ V ; $U_r = 60$ V respectivement aux bornes du dipôle D et du résistor.

2°) Les variations, respectivement, de l'intensité du courant et de la tension instantanée sont telles que : $i(t) = I_m\,sin(\omega t)$ et $u_{MN}(t) = U_m\,sin(\omega t + \varphi)$

Construire le diagramme de Fresnel des tensions en utilisant comme échelle : 1 cm pour 10 V

3°) Déterminer alors graphiquement les valeurs de R et de X.

4°)a) Calculer Z_D l'impédance du dipôle D et retrouver par le calcul les valeurs de R et de X.

Calculer alors la capacité C du condensateur sachant que l'inductance de la bobine vaut $L = 0{,}1$ H et que la fréquence est $N = 150$ Hz.

b) Donner les expressions numériques de $i(t)$ et de $u(t)$.

Rép. Num.:

1°) $I = 1{,}2$ A .

4°) a) $Z_D \approx 66{,}7\ \Omega$, $R = 39\ \Omega$, $X = 54\ \Omega$, $C = 26\ \mu$F ;

b) $i(t) = 1{,}2\sqrt{2}\ sin(300\pi t)$ (A), $u(t) = 125\sqrt{2}\ sin(300\pi t + 0{,}54)$ (V).

Exercice n°17 :

On dispose d'un résistor de résistance R, d'une bobine d'inductance L et de résistance négligeable et d'un condensateur de capacité C que l'on monte en série.

On soumet l'ensemble à une tension $u(t)$ de valeur efficace U = 100 V et de fréquence f réglable . L'intensité instantanée du courant dans le circuit est notée $i(t)$. On fait varier la fréquence. Pour une certaine valeur f_o = 40 Hz de f, on constate que l'intensité efficace dans le circuit a une valeur maximale I_o = 2 A. Pour une autre valeur f_1 de f, l'intensité efficace vaut I_1 = 1 A et la tension efficace aux bornes du condensateur est alors U_C = 40V.

1°) Calculer R et, pour $f = f_1$ calculer l'impédance Z_1 de l'ensemble et l'impédance Z_C du condensateur.

2°) On se place dans le cas où $f = f_1$, laquelle des deux grandeurs $u(t)$ ou $i(t)$ est en avance de phase sur l'autre ? Justifier la réponse.

3°) Calculer f_1. En déduire L et C.

4°) On fixe la fréquence f et on étudie la variation de la puissance moyenne P consommée dans le circuit en fonction de la résistance R.

a) Donner l'expression de P en fonction de R, U et X, X étant la réactance du circuit définie par $X = L\omega - \dfrac{1}{C\omega}$.

b) Pour quelles valeurs de R, exprimées en fonction de X, la puissance P est-elle maximale ?

5°)a) Montrer qu'à P maximale correspond un déphasage tension-intensité $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{4}$ rad.

Quelles sont alors les pulsations correspondantes. On notera ω_2 et ω_1 ces pulsations telle que $\omega_2 > \omega_1$.

b) Exprimer le rapport $\left(\dfrac{\omega_o}{\omega_2 - \omega_1}\right)$. En déduire sa signification physique.

Rép. Num. :

1°) $R = 50\ \Omega$, $Z_1 = 100\ \Omega$, $Z_C = 40\ \Omega$.

3°) $f_1 = 71{,}2$ Hz , $L = 0{,}28$ H , $C \approx 56\ \mu$F.

4°) b) $R = \pm X$. 5°) a) $\omega_1 = 178{,}57$ rad.s^{-1}, $\omega_2 = 357{,}14$ rad.s^{-1}.

PARTIE SOLUTIONS

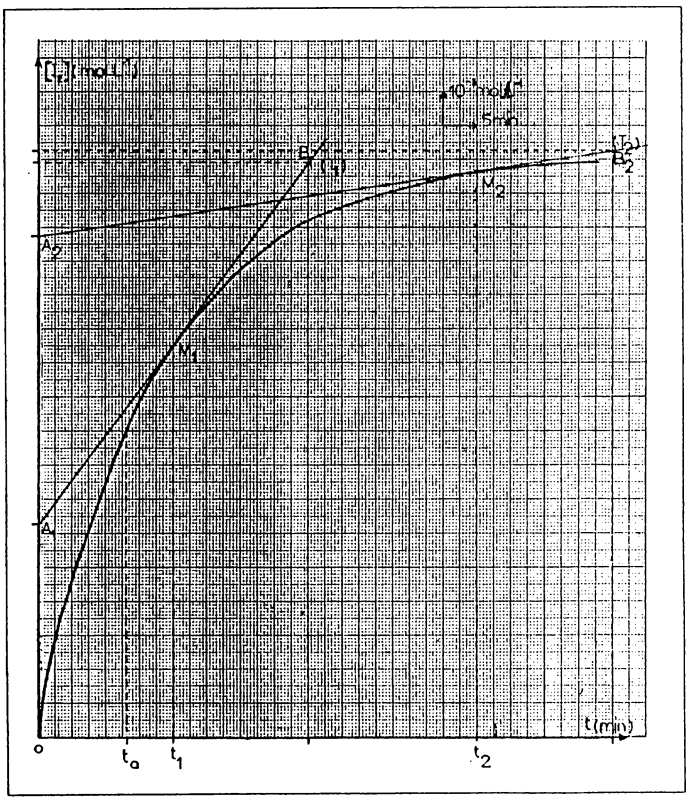
Exercice n°1 :

1°)a) Les couples rédox mis en jeu sont : (I_2/I^-) et $(S_2O_8^{2-}/SO_4^{2-})$.

b) L'équation bilan de la réaction qui se produit est :

$$S_2O_8^{2-} + 2I^- \longrightarrow 2SO_4^{2-} + I_2$$

2°) Traçage de la courbe :



3°)a) $v_{I_2} = \dfrac{d[I_2]}{dt}$

b) Graphiquement, la valeur de la vitesse v_1 à l'instant t_1 est représentée par le coefficient directeur de la tangente (T_1) à la courbe au point d'abscisse $t_1 = 20$ min : $v_1 = \dfrac{(16,9-6,3)}{40-0}\cdot 10^{-3} \approx 2,7.10^{-4}$ mol.L^{-1}.min^{-1}.

De même, la valeur de la vitesse v_2 à l'instant t_2 est représentée par le coefficient directeur de la tangente (T_2) à la courbe au point d'abscisse

$t_2 = 65$ min : $v_2 = \frac{(17,3-14,7)}{85-0}\cdot 10^{-3} \approx 3,06.10^{-5}$ mol.L^{-1}.min^{-1}.

c) La vitesse v diminue au cours du temps car la concentration des réactifs diminue lors de l'avancement de la réaction.

4°)a) Calculons en premier lieu, les nombres de mole initiaux de $S_2O_8^{2-}$ et de I^- :

$n_{S_2O_8^{2-})initial} = [S_2O_8^{2-}]_{initial}\cdot V_{K_2S_2O_8} = 3,6.10^{-3}$ mol

$n_{I^-)initial} = [I^-]_{initial}\cdot V_{KI} = 4.10^{-2}$ mol

D'après l'équation chimique : 1 mole de $S_2O_8^{2-}$ réagit avec 2 moles de I^-.

Or $n_{S_2O_8^{2-})initial} < \frac{1}{2}n_{I^-)initial}$, donc $S_2O_8^{2-}$ est en défaut.

Si la réaction était totale, elle s'arrêterait lorsque le réactif en défaut est totalement consommé, donc : $n_{I_2)formé} = n_{S_2O_8^{2-})initial} = 3,6.10^{-3}$ mol.

b) La moitié de la quantité de diiode formé si la réaction était totale est :

$$n_{I_2)t_0} = \frac{1}{2}n_{I_2)formé} = 1,8.10^{-3} \text{ mol}.$$

La concentration correspondante est : $[I_2]_{t_0} = \frac{1,8.10^{-3}}{0,2} = 9.10^{-3}$ mol.L^{-1}

D'après la courbe : $t_0 \approx 13,5$ min.

Exercice n°2 :

A/ 1°) $2I^- \longrightarrow I_2 + 2e^-$: est la demi-réaction d'oxydation

$2H^+ + H_2O_2 + 2e^- \longrightarrow 2H_2O$: est la demi-réaction de réduction

$2I^- + 2H^+ + H_2O_2 \xrightarrow{(1)} I_2 + 2H_2O$: est l'équation bilan.

2°) La demi-réaction de réduction est : $I_2 + 2e^- \longrightarrow 2I^-$

La demi-réaction d'oxydation est : $2S_2O_3^{2-} \longrightarrow S_4O_6^{2-} + 2e^-$

L'équation bilan est : $I_2 + 2S_2O_3^{2-} \xrightarrow{(2)} 2I^- + S_4O_6^{2-}$

B/ 1°) La vitesse moyenne de disparition de H_2O_2 entre les dates $t = 0$ et $t_1 = 8$ min est géométriquement représentée par l'opposé du coefficient directeur de la droite (Δ) :

$$v_{moy(H_2O_2)} = -\frac{\Delta n_{H_2O_2}}{\Delta t} = -\left(\frac{20 - 11,25}{0 - 8}\right)\cdot 10^{-2} = 1,09.10^{-2} \text{ mol.min}^{-1}.$$

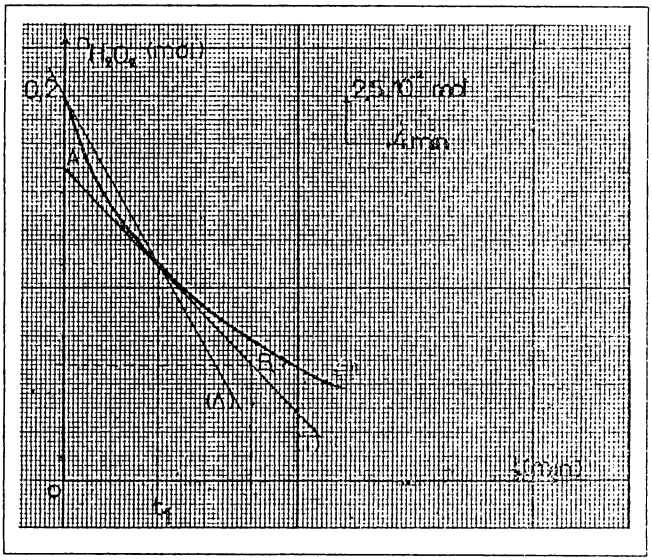
2°) La vitesse instantanée de disparition de H_2O_2 à la date t_1 est géométriquement représentée par la valeur absolue du coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe, au point d'abscisse t_1 :

$$v_{H_2O_2}(t_1) = -\left(\frac{150 - 60}{2 - 16}\right)\cdot 10^{-3} = 6{,}4.10^{-3}\ \text{mol.min}^{-1}.$$

D'après l'équation de la réaction (1) :

$n_{I^-})_{réagissant} = 2\,n_{H_2O_2})_{réagissant} \Rightarrow v_{I^-} = 2\,v_{H_2O_2}$.

AN : $v_{I^-} = 12{,}8.10^{-3}\ \text{mol.min}^{-1}$.



3°) D'après l'équation de la réaction de dosage (2) :

$n_{S_2O_3^{2-}})_{réagissant} = 2\,n_{I_2})_{réagissant}$

avec $n_{S_2O_3^{2-}})_{réagissant} = [S_2O_3^{2-}]\cdot V_{K_2S_2O_3}$; donc $V_{K_2S_2O_3} = \dfrac{2\,n_{I_2})_{réagissant}}{[S_2O_3^{2-}]}$;

or le nombre de mole de I_2 réagissant selon la réaction (2) à l'instant t_1 est égal au nombre de mole de I_2 formé par la réaction (1).

D'autre part, d'après l'équation de la réaction (1) :

$n_{I_2})_{formé} = n_{H_2O_2})_{réagissant} = n_{H_2O_2})_{initial} - n_{H_2O_2})_{restant}$

D'après la courbe : à l'instant $t_1 = 8$ min ; $n_{H_2O_2})_{restant} = 11{,}25.10^{-2}$ mol ; d'où:

$n_{I_2})_{formé} = (20 - 11{,}25).10^{-2} = 8{,}75.10^{-2}$ mol ; donc $V_{K_2S_2O_3} = \dfrac{2\times 0{,}0875}{2{,}5} = 70\ \text{cm}^3$

Exercice n°3 :

L'équation de la réaction s'écrit : $2H_2O_2 \longrightarrow 2H_2O + O_2\uparrow$

1°) $n_{O_2} = \dfrac{V_{O_2}}{V_M}$.

2°) D'après l'équation de la réaction :

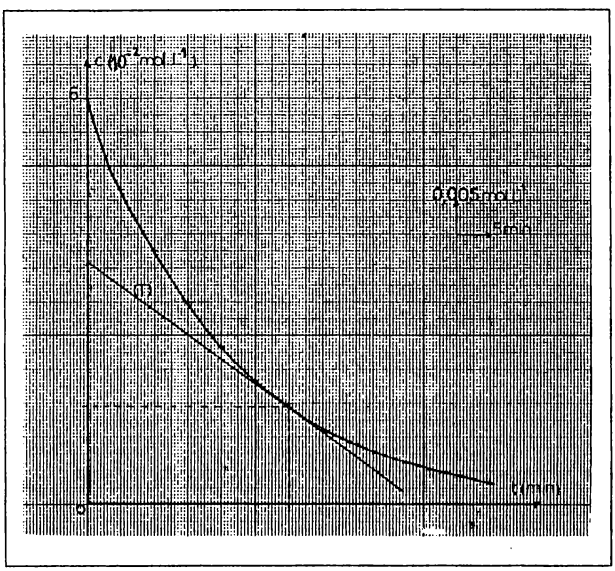
$n_{H_2O_2})_{disparu} = 2\,n_{O_2})_{formé} = 2\dfrac{V_{O_2}}{V_M}$;

$n_{H_2O_2})_{restant} = n_{H_2O_2})_{initial} - n_{H_2O_2})_{disparu}$; donc $c = \dfrac{n_{H_2O_2})_{initial}}{V_S} - 2\dfrac{V_{O_2}}{V_M \cdot V_S}$;

soit numériquement : $c = 6.10^{-2} - \dfrac{V_{O_2}}{12}$ (c en $mol.L^{-1}$ et V_{O_2} en L).

3°)

t (min)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	60
$c\,(10^{-2} mol.L^{-1})$	6	4,66	3,75	3,00	2,33	1,83	1,50	1,08	0,91	0,33



4°) $v_{H_2O_2} = -\dfrac{dc}{dt} = -\dfrac{d[H_2O_2]}{dt}$.

5°) $v(t)$ diminue au cours du temps puisque celle-ci représente l'opposé du coefficient directeur de la tangente à la courbe. La valeur absolue de ce coefficient diminue au cours du temps, en effet la tangente étant de moins en moins incliné sur l'horizontale.

D'après la courbe, à t = 30min : $v(t) = 7{,}14.10^{-4}\ mol.L^{-1}.min^{-1}$

$= 1{,}19.10^{-5}\ mol.L^{-1}.s^{-1}$.

Exercice n°4 :

1°) $2H_3O^+ + 2Cl^- + Zn \longrightarrow H_2^{\uparrow} + Zn^{2+} + 2Cl^- + 2H_2O$

a) D'après l'équation de la réaction : $n_{H_2})_{formé} = n_{Zn^{2+}})_{formé}$

avec $n_{H_2})_{formé} = \dfrac{V_{H_2}}{V_M}$ et $n_{Zn^{2+}})_{formé} = [Zn^{2+}]_{formé} V$ donc $[Zn^{2+}]_{formé} = \dfrac{V_{H_2}}{V_M \cdot V}$;

AN: $[Zn^{2+}] = \dfrac{0{,}103}{24.4.10^{-2}} = 10{,}73.10^{-2}$ mol.L^{-1}.

b) $n_{Zn})_{initial} = \dfrac{m}{M_{Zn}} = \dfrac{1}{65{,}4} = 1{,}53.10^{-2}$ mol; et

$n_{H_3O^+})_{initial} = c_a V = 0{,}5 \times 4.10^{-2} = 2.10^{-2}$ mol.

D'après l'équation de la réaction : $2n_{Zn})_{réagissant} = n_{H_3O^+})_{réagissant}$

or $n_{H_3O^+})_{initial} < 2n_{Zn})_{initial}$; donc H_3O^+ est le réactif en défaut.

$n_{Zn^{2+}})_{formé\ à\ l'\infty} = \frac{1}{2} n_{H_3O^+})_{initial} \Rightarrow c_\infty = [Zn^{2+}]_\infty = \frac{1}{2} c_a = 0{,}25$ mol.L^{-1}

La masse du zinc restant à la fin est :

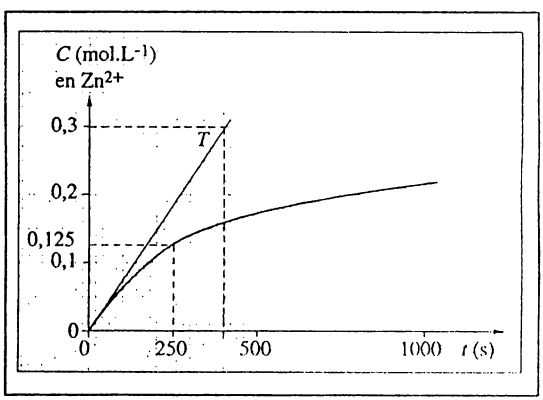
$m_\infty = m_{Zn})_{initial} - m_{Zn})_{réagissant}$ avec $m_{Zn})_{réagissant} = n_{Zn})_{réagissant} \cdot M_{Zn}$

AN: $m_{Zn})_{réagissant} = 65{,}4.10^{-2}$ g $\Rightarrow m_\infty = 0{,}346$ g

2°)a) Graphiquement la vitesse moyenne de formation des ions Zn^{2+} est égale à la pente de la droite passant par les points d'abscisses $t = 0$ et $t = 500$ s :

$$v_{moy_{Zn^{2+}}} = \frac{0{,}17 - 0}{500 - 0}$$

$= 3{,}4.10^{-4}$ mol.L^{-1}.s^{-1}.



b) Graphiquement la vitesse instantanée à $t = 0$ est égale à la pente de la tangente (T) à la courbe au point d'abscisse $t = 0$: $v_{Zn^{2+}} = 7{,}5.10^{-4}$ mol.L^{-1}.s^{-1}.

c) Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$, correspond à l'instant où la moitié de la quantité de matière du réactif en défaut a réagi.

A $t = t_{1/2}$: $[H_3O^+]_{réagissant} = \frac{1}{2} c_a$; or :

$[Zn^{2+}]_{formé} = \frac{1}{2}[H_3O^+]_{réagissant} = \frac{1}{4} c_a = 0{,}125$ mol.L^{-1}; d'après la coube : $t_{1/2} = 250$ s.

Exercice n°5 :

1°) L'équation bilan de la réaction étudiée est :

$$2I^- + 2H^+ + H_2O_2 \longrightarrow 2H_2O + I_2$$

2°) Remarquons d'abord que les mélanges initiaux sont dans les proportions stœchiométriques : $[H_2O_2]_0 = \frac{1}{2}[I^-]_0$.

Dans les expériences (1) et (3) : $[I_2]_\infty = [H_2O_2]_0 = 10^{-2}$ mol.L^{-1}

Dans les expériences (2) et (4) : $[I_2]_\infty = [H_2O_2]_0 = 2.10^{-2}$ mol.L^{-1}.

3°) La vitesse initiale de formation de I_2 est déterminée par le coefficient directeur de la tangente à la courbe à l'origine, et ceci pour chaque expérience : $v_a = 0{,}128.10^{-2}$ mol.L^{-1}.h^{-1}

$v_b = 0{,}25.10^{-2}$ mol.L^{-1}.h^{-1}

$v_c = 0{,}48.10^{-2}$ mol.L^{-1}.h^{-1}

$v_d = 1{,}05.10^{-2}$ mol.L^{-1}.h^{-1}

4°)* v_a est la vitesse la plus faible correspondante à la température la plus basse et les concentrations initiales les plus faibles. La courbe (a) correspond donc à l'expérience (1).

* v_d est la vitesse la plus grande, elle correspond à la température la plus élevée et les concentrations initiales les plus importantes. On attribue donc la courbe (d) à l'expérience (4).

* $[I_2]_\infty$ permet d'attribuer la courbe (c) à l'expérience (2) et la courbe(b) à l'expérience (3). En effet, à t_∞ et pour l'expérience (2),

$[I_2]_\infty = 2.10^{-2}$ mol.L^{-1} alors que pour l'expérience (3), $[I_2]_\infty = 10^{-2}$ mol.L^{-1}.

Or à t = 6h pour la courbe (c) : $[I_2] = 1{,}2.10^{-2}$ mol.L^{-1} > $[I_2]_\infty$ pour l'expérience (3). La courbe (c) ne peut donc être attribuée qu'à l'expérience (2).

Remarque : La vitesse initiale ne permet pas d'identifier les expériences (2) et (3) puisque les deux facteurs cinétiques (température et concentrations) ont des effets strictement opposés.

Exercice n°6 :

1°) Les couples rédox mis en jeu sont : (MnO_4^-/Mn^{2+}) *et* $(CO_2/C_2O_4^{2-})$

Les demi-équations d'oxydation et de réduction sont respectivement :

$$\left(C_2O_4^{2-} \longrightarrow 2CO_2 + 2e^- \right) \times 5$$

$$\left(MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \longrightarrow Mn^{2+} + 4H_2O \right) \times 2$$

L'équation bilan est :

$$5C_2O_4^{2-} + 2MnO_4^- + 16H^+ \longrightarrow 10CO_2 + 2Mn^{2+} + 8H_2O$$

Calculons la composition initiale du mélange :

$n_{MnO_4^-})_{initial} = [MnO_4^-]_{initial} \cdot V = 0{,}2 \cdot V$ mol.L^{-1}.

$n_{C_2O_4^{2-}})_{initial} = [C_2O_4^{2-}]_{initial} \cdot V = 0{,}5 \cdot V$ mol.L^{-1}.

D'après l'équation bilan de la réaction : $\dfrac{n_{MnO_4^-})_{réagissant}}{n_{C_2O_4^{2-}})_{réagissant}} = \dfrac{2}{5}$;

d'autre part : $\dfrac{n_{MnO_4^-})_{initial}}{n_{C_2O_4^{2-}})_{initial}} = \dfrac{2}{5}$

Les réactifs sont en proportions stœchiométriques, à la fin de la réaction ils disparaissent simultanément.

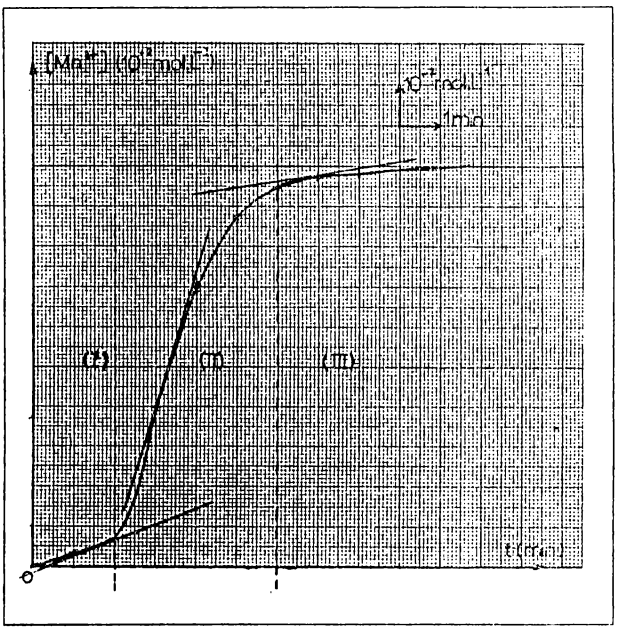
A $t \geq 9$ min : $[MnO_4^-] = 0$; donc $[C_2O_4^{2-}] = 0$; il ne reste plus de $C_2O_4^{2-}$.

2°) $n_{Mn^{2+}})_{formé} = n_{MnO_4^-})_{réagissant} = n_{MnO_4^-})_{initial} - n_{MnO_4^-})_{restant}$; le volume de la solution étant constant, on a alors :

$[Mn^{2+}]_{formé} = [MnO_4^-]_{réagissant} = [MnO_4^-]_{initial} - [MnO_4^-]_{restant}$

avec $[MnO_4^-]_{initial} = \dfrac{0{,}2 \cdot V}{2 \cdot V} = 0{,}1$ mol.L^{-1}.

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$[Mn^{2+}]_{formé}$ (10^{-3}mol.L^{-1})	0	4	7	40	70	88	95	97	98	100



La courbe présente trois parties distinctes, en effet on constate que le coefficient directeur de la tangente à la courbe pour différents points de celle-ci, est d'abord faible puis augmente fortement pour enfin devenir faible jusqu'à s'annuler.

Par ailleurs, la formation d'ions Mn^{2+} catalyse la réaction, de plus il est l'un des produits de cette réaction : c'est l'auto-catalyse.

Partie I : La vitesse de la réaction est faible car il y a très peu d'ions Mn^{2+} formés.

Partie II : La vitesse est importante ; cela est dû au phénomène d'auto-catalyse, les ions Mn^{2+} formés sont en quantité assez élevée.

Partie III : La vitesse est faible puis nulle ; cela est dû à la diminution, jusqu'à disparition des réactifs.

Exercice n°7 :

1°) Dans le mélange réactionnel, se déroulent les deux réactions suivantes :

$$H_2O_2 + 2I^- + 2H^+ \xrightarrow{(1)} I_2 + 2H_2O$$

$$I_2 + 2S_2O_3^{2-} \xrightarrow{(2)} 2I^- + S_4O_6^{2-}$$

Le nombre de mole de I_2 formé par la réaction (1) est égal au nombre de mole de I_2 consommé par la réaction (2).

D'après l'équation de la réaction (2) : $n_{I_2})_{réagissant} = \frac{1}{2} n_{S_2O_3^{2-}})_{réagissant}$;

or dans chaque 2 mL de $Na_2S_2O_3$ ajouté, il y a : $c \cdot V = 2.10^{-3}$ mol de $S_2O_3^{2-}$;

donc le nombre de mole de I_2 formé par (1) ou consommé par (2) est :

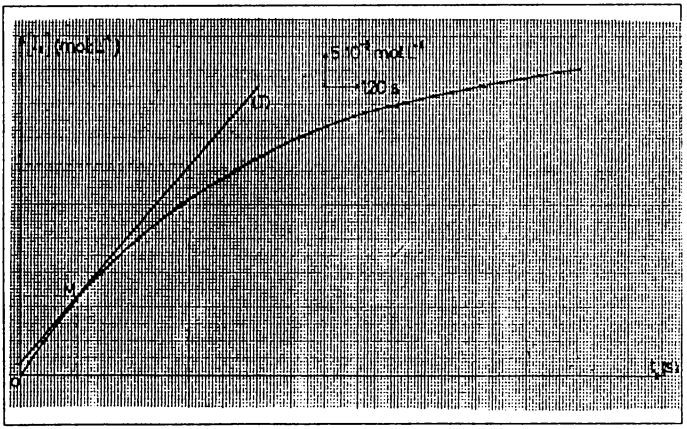
$n_{I_2} = 10^{-3}$ mol pour chaque 2 mL de $Na_2S_2O_3$ ajouté.

Le temps nécessaire à l'apparition de la coloration bleue mesure donc le temps nécessaire pour que la réaction (1) produise 10^{-3} mol de I_2. A la n^{ième} apparition de la coloration bleue, la réaction (1) aura produit $n.10^{-3}$ mol de I_2.

2°) $[I_2] = \frac{n_{I_2}}{V}$.

t (s)	86	183	293	419	570	755	993	1341	1955
$[I_2]$ (10^{-3} mol.L^{-1})	5	10	15	20	25	30	35	40	45

3°) Courbe $[I_2] = f(t)$:



4°) La vitesse de formation de I_2 à t = 200 s est déterminée comme suit :
On trace la tangente à la courbe au point M d'abscisse t = 200 s et on détermine sa pente.

$$\underline{AN}: \quad v_{I_2} = \frac{(6,2-0,3)\times 5.10^{-3}}{600-0} \approx 4,9.10^{-5}\ \text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}.$$

La vitesse de I_2 diminue au cours du temps suite à la diminution de la concentration de H_2O_2 qui est progressivement consommé par la réaction alors que la concentration en ions I^- peut être considérée comme constante du fait de leur régénération par la réaction (2).

5°) Remarquons que H_2O_2 est le réactif en défaut puisque les ions I^- sont régénérés par la réaction de dosage et se retrouveront donc en excès à la fin de la réaction.

$n_{I_2})_\infty$ formé par la réaction (1) est égal à $n_{H_2O_2})_{initial}$;

avec $n_{H_2O_2})_{initial} = n_{H_2O_2})_{t=0} = 9,82.10^{-3}$ mol, d'où :

$n_{I_2})_\infty = 9,82.10^{-3}$ mol et $v_{I_2})_\infty = 0\ \text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$; (c'est la fin de la réaction).

6°) La température est un autre facteur qui peut faire varier la vitesse de formation du diiode. De même, on peut faire varier la concentration en ions H^+ ; en effet H^+ est un vrai réactif.

Exercice n°8 :

1°) * Il s'agit d'une réaction d'estérification.
* L'équation bilan est :

$$\underset{\text{Acide carboxylique}}{HCOOH} + \underset{\text{Alcool primaire}}{CH_3-(CH_2)_3-CH_2OH} \rightleftharpoons \underset{\text{Ester}}{HCOO-(CH_2)_4-CH_3} + \underset{\text{Eau}}{H_2O}$$

* Les produits formés sont : l'eau et le méthanoate de pentyl (ester)

2°) Il s'agit d'un petit réfrigérant, il permet de condenser les vapeurs qui pourraient se dégager, tout en maintenant le milieu réactionnel à la pression atmosphérique.

3°) On réalise une « trempe » du milieu réactionnel : La température diminue brutalement, ce qui diminue fortement la vitesse de la réaction.
Cette réaction est pratiquement arrêtée.

4°) La solution d'hydroxyde de sodium contient des ions OH^- qui vont réagir avec l'acide méthanoïque. La réaction du dosage est :

$$HCOOH + OH^- \longrightarrow HCOO^- + H_2O$$

A l'équivalence : $n_{OH^-})_{ajouté} = n_{acide})_{restant}$

Déterminons le nombre de mole d'acide restant à une date t donnée :

On a :	Acide	+	Alcool	$\rightleftharpoons$	Ester	+	Eau
à $t = 0$:	$\frac{0,2}{10}$		$\frac{0,2}{10}$		0		0 (en mol)
à $t > 0$:	$0,02 - x$		$0,02 - x$		x		x (en mol)

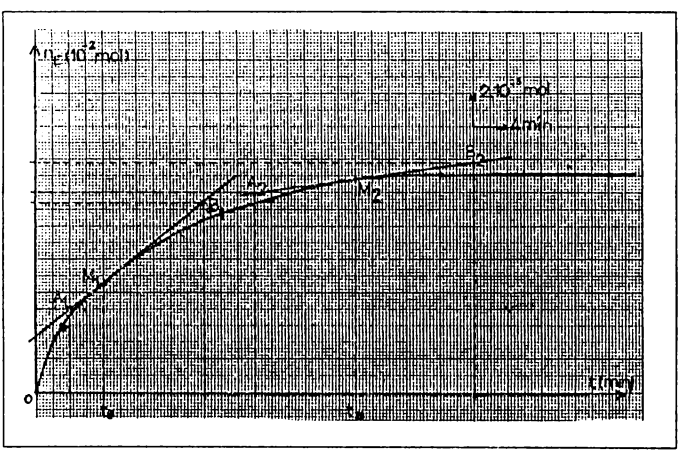
On a donc : $n_{acide})_{restant} = 0,02 - x$, avec $x = n_E$.

D'autre part : $n_{OH^-})_{ajouté} = C_B \cdot V_B$; d'où : $0,02 - n_E = C_B \cdot V_B$; soit

$n_E = 0,02 - C_B \cdot V_B$

5°) Tableau de mesures :

t (min)	0	3	8	18	28	38	48	58	68
n_E (10^{-2} mol)	0	0,40	0,65	1	1,15	1,28	1,31	1,31	1,31



6°) La vitesse de formation de l'ester est : $v = \frac{dn_E}{dt}$

NB : La vitesse v de formation de l'ester est dite vitesse apparente car la réaction d'estérification s'accompagne toujours de la réaction d'hydrolyse.

Graphiquement : Pour t = 8 min ; $v_{t_8} = \frac{(11,4-5).10^{-3}}{20-4} = 4.10^{-4}$ mol.min^{-1}.

Pour t = 38 min ; $v_{t_{38}} = \frac{(13,8-12).10^{-3}}{52-26} = 6,92.10^{-5}$ mol.min^{-1}.

Lorsque t augmente, v tend vers 0. En effet pour t > 48 min, le nombre de mole d'ester ne varie plus.

7°) La limite de $\frac{n_E}{0,02} = \frac{1,31.10^{-2}}{2.10^{-2}} = 0,655$ ou 65,5 % < 100 %.

La réaction d'estérification n'est pas totale, elle est limitée par la réaction inverse (réaction d'hydrolyse de l'ester).

Equilibre d'estérification - hydrolyse

Exercice n°1 :

1°)a) Il s'agit d'une réaction d'estérification décrite par :

	Alcool +	Acide	⇌	Ester +	Eau	
à $t = 0$:	2	3		0	0	(en mol)
à $t_{éq}$:	$2-x$	$3-x$		x	x	(en mol)

A l'équilibre, le nombre de mole d'ester obtenu est x = 1,57 mol.
D'après la loi d'action de masse :

$$\Pi_{éq.dyn.} = K = \frac{[ester]_{éq}\cdot[eau]_{éq}}{[alcool]_{éq}\cdot[acide]_{éq}} = \frac{\left(\frac{n_{ester}}{V}\right)_{éq}\cdot\left(\frac{n_{eau}}{V}\right)_{éq}}{\left(\frac{n_{alcool}}{V}\right)_{éq}\cdot\left(\frac{n_{acide}}{V}\right)_{éq}} = \left(\frac{n_{ester}\cdot n_{eau}}{n_{alcool}\cdot n_{acide}}\right)_{éq} ;$$

d'où : $K = \frac{x^2}{(2-x)\cdot(3-x)}$. ***AN*** : $K = \frac{(1{,}57)^2}{(3-1{,}57)(2-1{,}57)} = 4$

b) Si le mélange initial renferme une mole d'alcool et une mole d'acide :

	Alcool +	Acide	⇌	Ester +	Eau	
à $t = 0$:	1	1		0	0	(en mol)
à $t_{éq}$:	$1-x$	$1-x$		x	x	(en mol)

$K = \frac{x^2}{(1-x)^2} = 4 \Leftrightarrow x = 2(1-x) \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ mol.

la composition du mélange à l'équilibre serait : $\begin{cases} n_{alcool} = n_{acide} = \frac{1}{3}\text{ mol} \\ n_{ester} = n_{eau} = \frac{2}{3}\text{ mol} \end{cases}$

2°)a)	Alcool +	Acide	⇌	Ester +	Eau	
à $t = 0$:	1	2		0	0	(en mol)
à t_1 :	$1-x$	$2-x$		x	x	(en mol)

On a : $1 - x + 2 - x = 1{,}5 \Leftrightarrow x = 0{,}75$ mol, donc la composition du mélange à l'instant de date t_1 est : $\begin{cases} n_{alcool} = 0{,}25\,\text{mol} ; n_{acide} = 1{,}25\,\text{mol} \\ n_{ester} = n_{eau} = 0{,}75\,\text{mol} \end{cases}$

b) Calculons la fonction Π des concentrations à la date t_1 :

$\Pi_{t_1} = \frac{(0{,}75)^2}{0{,}25\times 1{,}25} = 1{,}8 < K = 4$; le système n'est donc pas dans un état d'équilibre dynamique, il évoluera dans le sens de la réaction d'estérification, sens pour lequel Π croit pour atteindre K.

Exercice n°2 :

1°) L'équation des transformations chimiques est :

$$\text{Alcool} + \text{Acide} \rightleftharpoons \text{Ester} + \text{Eau}$$

$$\underbrace{CH_3OH}_{\text{méthanol}} + \underbrace{CH_3-COOH}_{\text{acide éthanoique}} \rightleftharpoons \underbrace{CH_3-COO-CH_3}_{\text{éthanoate de méthyle}} + \underbrace{H_2O}_{\text{eau}}$$

2°)a) $n_{o_i} = \frac{m_i}{M_i}$. ***AN***: $n_{o_{alcool}} = n_{o_{acide}} = n_{o_{ester}} = n_{o_{eau}} = 1\,\text{mol}$.

b) La fonction des concentrations Π est définit par :

$$\Pi = \frac{[ester]\cdot[eau]}{[alcool]\cdot[acide]} = \frac{\frac{n_{ester}}{V}\cdot\frac{n_{eau}}{V}}{\frac{n_{alcool}}{V}\cdot\frac{n_{acide}}{V}} = \frac{n_{ester}\cdot n_{eau}}{n_{alcool}\cdot n_{acide}}$$

AN: $\Pi = 1$; $\Pi \neq K_c$ le système chimique n'est donc pas en état d'équilibre dynamique.

c) $\Pi < K_c$; le système évolue dans le sens direct : sens de la réaction d'estérification.

	Alcool +	Acide	$\rightleftharpoons$	Ester +	Eau	
à $t = 0$:	1	1		1	1	(en mol)
à $t_{éq}$:	$1-x$	$1-x$		$1+x$	$1+x$	(en mol)

Appliquons la loi d'action de masse :

$$\Pi_{éq\cdot dyn} = K_c = \left(\frac{n_{ester}\cdot n_{eau}}{n_{alcool}\cdot n_{acide}}\right)_{éq} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\,\text{mol}.$$

La composition du mélange à l'équilibre est : $\begin{cases} n_{acide} = n_{alcool} = \frac{2}{3}\,\text{mol} \\ n_{ester} = n_{eau} = \frac{4}{3}\,\text{mol} \end{cases}$

3°)*) Si on augmente la température du mélange initial, on atteint le même état d'équilibre mais plus rapidement.

*) Si on augmente la température du mélange à l'équilibre dynamique, rien ne se produit car les réactions d'estérification et d'hydrolyse sont athermiques.

Remarque : Pour les réactions d'estérification et d'hydrolyse, la température n'est qu'un facteur cinétique.

4°)a) Soit t_p : l'instant de perturbation de l'état d'équilibre du système ;

	Alcool	+	Acide	$\rightleftharpoons$	Ester	+	Eau	
A t_p :	$\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{4}{3}+\frac{m}{M_{eau}}$	(en mol)

A t_p : $\Pi = \dfrac{\frac{4}{3}\times\left(\frac{4}{3}+\frac{m}{M_{eau}}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} > \dfrac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 4 = K_c$ donc $\Pi > K_c$: le système évoluera dans le sens de l'hydrolyse.

Remarque : On pourra répondre à cette question à partir de la loi de modération, en effet ; la perturbation consiste à une augmentation de la concentration de l'eau donc le système évoluera dans le sens de la réaction tendant à diminuer la concentration de l'eau : soit alors le sens de la réaction d'hydrolyse.

b)	Alcool	+	Acide	$\rightleftharpoons$	Ester	+	Eau	
à t_p :	$\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{4}{3}+\frac{m}{M_{eau}}$	(en mol)
à $t'_{éq}$:	$\frac{2}{3}+x$		$\frac{2}{3}+x$		$\frac{4}{3}-x$		$\frac{4}{3}+\frac{m}{M_{eau}}-x$	(en mol)

A l'équilibre dynamique, le nombre de mole d'acide éthanoïque étant égal à :
$\frac{2}{3}+x=1 \Leftrightarrow x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ mol.

D'après la loi d'action de masse : $K_c = \dfrac{1\times\left(1+\frac{m}{M_{eau}}\right)}{1\times 1} = 4 \Leftrightarrow m = 54$ g.

Exercice n°3 :

1°) Le mélange initial ne renferme ni alcool ni acide, réactifs nécessaires à la réaction d'estérification. Celle-ci ne peut donc avoir lieu. La réaction qui a lieu spontanément à l'instant du mélange est la réaction d'hydrolyse.

2°)a)	Ester	+	Eau	$\rightleftharpoons$	Alcool	+	Acide	
à $t=0$:	1		1		0		0	(en mol)
à t_1 :	$1-x$		$1-x$		x		x	(en mol)

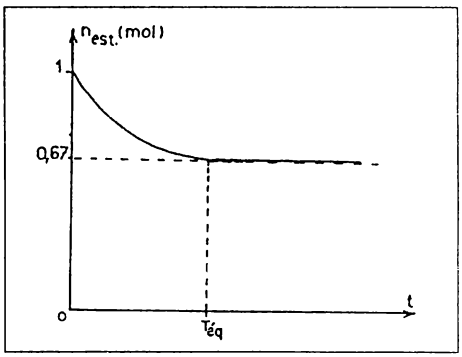
Sachant que $n_{acide} = x = \frac{1}{3}$ mol, la composition du mélange à l'instant t_1 est donc : $\begin{cases} n_{alcool} = \frac{1}{3} \text{ mol} \\ n_{ester} = n_{eau} = \frac{2}{3} \text{ mol} \end{cases}$

b) La fonction Π des concentrations à la date t_1 :

$\Pi = \dfrac{[alcool]_{t_1} \cdot [acide]_{t_1}}{[ester]_{t_1} \cdot [eau]_{t_1}} = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 0{,}25 = K_{hyd}$, le système est donc en équilibre dynamique.

c) Le rendement de la réaction est $R = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)}{1} = 33\,\%$.

Courbe $n_{ester} = f(t)$



3°)a)*) Procédure (α) : la température n'étant pas un facteur d'équilibre pour l'équilibre d'estérification ou d'hydrolyse, sa diminution n'a donc aucun effet sur la composition finale du système à l'équilibre (n_{alcool} (ou n_{acide}) reste alors inchangé). Cependant, la diminution de la température ralentit la réaction et par suite, elle retarde l'état d'équilibre.

*) Procédure (δ) : Un catalyseur n'est qu'un facteur cinétique, il permet d'atteindre l'état d'équilibre plus rapidement.

*) Procédure (β) : C'est l'unique procédure parmi les trois proposées qui permet d'atteindre cet objectif.

Démonstration : $K_{hyd} = \left(\dfrac{n_{alcool} \cdot n_{acide}}{n_{ester} \cdot n_{eau}}\right)_{éq}$. Exprimons K_{hyd} en fonction de R' : nouveau rendement.

	Ester	+	Eau	⇌	Alcool	+	Acide	
à $t = 0$:	a ($a > 1$)		1		0		0	(en mol)
à t_1 :	$a - x'$		$1 - x'$		x'		x'	(en mol)

$K_{hyd} = \dfrac{x^2}{(1-x)\cdot(1-x)} = \dfrac{x'^2}{(a-x')\cdot(1-x')}$; $R = \dfrac{x}{1} = x$

et $R' = \dfrac{x'}{1} = x' \Rightarrow K_{hyd} = \dfrac{R'^2}{(a-R')\cdot(1-R')} = \dfrac{R^2}{(1-R)\cdot(1-R)}$

(car $K_{hyd} = 0,25 = C^{te}$ à $T = C^{te}$)

$R' > R$ et $K_{hyd} = C^{te} \Leftrightarrow (a-R')(1-R') > (1-R)(1-R)$

$\Leftrightarrow \frac{a-R'}{1-R} > \frac{1-R}{1-R'} > 1 \Leftrightarrow a-R' > 1-R \Leftrightarrow a > 1+R'-R$;

or $R'-R > 0$ d'où $a > 1$.

Conclusion : Pour améliorer le rendement de la réaction, le mélange initial doit être plus riche en ester.

Remarque :

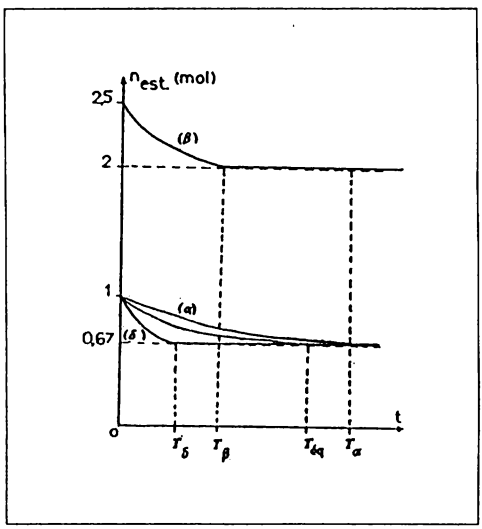
*) Le résultat obtenu précédemment peut être adopter comme règle générale énoncée comme suit : « Un excès de l'un des réactifs permet de transformer plus totalement le réactif en défaut ».

*) Partir d'un mélange initial plus riche en ester, est équivalent à un état d'équilibre correspondant à un mélange initial équimolaire perturbé par un ajout d'ester. D'après la loi de modération, cet équilibre serait déplacé dans le sens de l'hydrolyse augmentant ainsi son rendement.

b) $R' = \frac{x'}{1} = 0,5 \Leftrightarrow x' = 0,5\,mol$;

$$K_{hyd} = \frac{x'^2}{(a-x')(1-x')} = \frac{0,25}{(a-0,5)\times 0,5} = 0,25 \Leftrightarrow a = 2,5\,mol.$$

c)



Produit de solubilité

Exercice n°4 :

1°) L'équation de la réaction de dissolution de $Al(OH)_{3(sd)}$ est :

$$Al(OH)_{3(sd)} \rightleftharpoons Al^{3+} + 3OH^-$$

A la saturation la composition est : s $3s$ (en mol.L^{-1})

Le produit de solubilité de cet électrolyte s'écrit :

$K_s = [Al^{3+}]_{éq} \cdot [OH^-]^3_{éq} = s \cdot (3s)^3 = 27 s^4$, d'où: $s = \sqrt[4]{\frac{K_s}{27}}$.

AN: $s = 4{,}38.10^{-9}$ mol.L^{-1}.

2°) $Ca(OH)_2$ étant un électrolyte fort, l'équation de sa réaction de dissolution est : $Ca(OH)_{2(sd)} \longrightarrow Ca^{2+} + 2OH^-$

$[OH^-]_{initiale} = 2C$, C étant la concentration de la solution d'hydroxyde de calcium.

Soit t = 0, la date d'introduction de $Al(OH)_{3(sd)}$ dans la solution de $Ca(OH)_2$

$$Al(OH)_{3(sd)} \rightleftharpoons Al^{3+} + 3OH^-$$

à $t = 0$: 0 $2C$ (en mol.L^{-1})

à $t_{éq}$: s' $3s' + 2C$ (en mol.L^{-1})

$K_s = [Al^{3+}]_{éq} \cdot [OH^-]^3_{éq} = s' \cdot (3s' + 2C)^3 = s' \cdot (3s' + 0{,}2)^3$

or, $3s' + 0{,}2 \approx 0{,}2$; donc: $K_s = s' \cdot (0{,}2)^3$; d'où: $s' = \frac{K_s}{(0{,}2)^3}$

AN: $s' = 1{,}25.10^{-30}$ mol.L^{-1}.

s' est nettement inférieure à s , on conclue alors qu'un électrolyte est beaucoup moins soluble dans une solution contenant initialement l'un de ses ions que dans l'eau pure.

Exercice n°5 :

1°)a) L'équation de la réaction de dissolution est :

$$AgCl_{(sd)} \rightleftharpoons Ag^+ + Cl^-$$

A la saturation la composition est : s s (en mol.L^{-1})

$K_s = [Ag^+]_{éq} \cdot [Cl^-]_{éq} = s^2$; d'où: $s = \sqrt{K_s}$; ***AN***: $s = 1{,}33.10^{-5}$ mol.L^{-1}.

b) La concentration de la solution saturée de $AgCl$ est égale à sa solubilité

$s = \frac{n}{V} = \frac{m}{M_{AgCl} \cdot V}$; d'où: $m = sV M_{AgCl}$; ***AN***: $m = 1{,}91.10^{-3}$ g.

2°) *NaCl* étant un électrolyte fort, son équation de dissolution est :

$$NaCl_{(sd)} \longrightarrow Na^+ + Cl^-$$

Pour qu'il y ait précipitation entre Ag^+ et Cl^-, il faut que la fonction Π, à l'instant du mélange, soit supérieur à K_s.

A la date du mélange, notée t_0, on a :

$$\Pi = [Ag^+]_0 \cdot [Cl^-]_0 = \left(\frac{sV_1}{V_1+V_2}\right)\cdot\left(\frac{sV_1+C_1V_2}{V_1+V_2}\right)\cdot$$

$$\underline{AN}: \quad \Pi = \frac{(1{,}33.10^{-7})\times(1{,}33.10^{-7}+2.10^{-5})}{(3.10^{-2})^2} \approx 3.10^{-9}$$

$\Pi > K_s$: il y a donc précipitation de *AgCl*.

3°) Les électrolytes étant à l'état dissout, la seule réaction possible est celle de la précipitation de *AgCl*. Pour que cette dernière ne se produise pas, il faut que $\Pi < K_s \Leftrightarrow \left(\frac{sV_1}{V_1+V_2}\right)\cdot\left(\frac{sV_1+C_2V_2}{V_1+V_2}\right) < K_s$, d'où :

$$C_2 < \frac{K_s(V_1+V_2)^2}{sV_1V_2} - \frac{sV_1}{V_2} = C_0. \quad \underline{AN}: C_0 = 5{,}32.10^{-5}\ \text{mol.L}^{-1}.$$

Exercice n°6 :

1°) L'équation de la réaction de dissolution du nitrate de sodium est :

$$NaNO_{3(sd)} \rightleftharpoons Na^+ + NO_3^-$$

A la saturation la composition est : s s (en mol.L^{-1})

Le produit de solubilité s'écrit : $K_s = [Na^+]_{éq} \cdot [NO_3^-]_{éq} = s^2$.

2°)a) La solution renferme une masse de $NaNO_3$ $m_{dissoute}$ = 90 g ; soit un nombre de mole $n_{dissout} = \frac{m_{dissoute}}{M_{NaNO_3}}$ donc la solubilité est $s = \frac{n_{dissout}}{V}$

$\underline{AN}$: $s \approx 10{,}59\ \text{mol.L}^{-1}$.

b) $K_s = s^2 \approx 112$

3°)a) Soit s' la nouvelle solubilité de $NaNO_{3(sd)}$ dans la solution d'acide nitrique et t = 0 la date juste avant l'introduction de $NaNO_{3(sd)}$:

	$NaNO_{3(sd)}$	$\rightleftharpoons$	Na^+	+	NO_3^-
A t = 0 :			0		C_0
A la saturation :			s'		$s'+C_0$

(C_0 étant la concentration initiale de la solution de HNO_3).

$K_s = s'(s'+C_o) \Leftrightarrow s'^2 + s'C_o - K_s = 0$; la solution mathématique physiquement acceptable, de cette équation du second degré est : $s' = 10{,}10\,mol.L^{-1}$. Remarquons que $s' < s$ donc les 90 g de $NaNO_3$ introduites ne se dissolvent pas totalement dans la solution d'acide nitrique (1 M).

Remarque :
Ce résultat est prévisible car l'introduction des 90 g de $NaNO_3$ dans une solution d'acide nitrique est équivalente à l'ajout d'ions NO_3^- à une solution aqueuse saturée de $NaNO_3$ qui engendrerait, d'après la loi de modération, un déplacement d'équilibre dans le sens de la précipitation tendant à s'opposer à l'augmentation de la concentration des ions NO_3^- et donc à la diminution de la solubilité.

b) $m_{dissoute} = n_{dissout} \cdot M_{NaNO_3} = s' \cdot V \cdot M_{NaNO_3}$. ***AN*** : $m_{dissoute} = 85{,}8\,g$.

Exercice n°7 :

1°) $K_{s_2} = 320 >> 1$; la dissolution de Na_2SO_4 est pratiquement totale.

2°) L'équation de la réaction de dissolution du sulfate de calcium est :

$$CaSO_{4(sd)} \rightleftharpoons Ca^{2+} + SO_4^{2-}$$

A la saturation, on a : $[Ca^{2+}]_{éq} = [SO_4^{2-}]_{éq} = s_1$. Donc :

$K_{s_1} = [Ca^{2+}]_{éq} \cdot [SO_4^{2-}]_{éq} = s_1^2$; d'où : $s_1 = \sqrt{K_{s_1}}$. ***AN*** : $s_1 = 7{,}74.10^{-3}\,mol.L^{-1}$.

3°)a) Les équations des réactions de dissolution de $CaCl_2$ et de Na_2SO_4 sont respectivement : $CaCl_{2(sd)} \longrightarrow Ca^{2+} + 2Cl^-$

$Na_2SO_{4(sd)} \longrightarrow 2Na^+ + SO_4^{2-}$

L'unique précipitation possible dans le mélange est celle des ions Ca^{2+} avec les ions SO_4^{2-}. Pour que cette précipitation soit possible spontanément, il faut que la fonction des concentrations $\Pi_1 = [Ca^{2+}]_o \cdot [SO_4^{2-}]_o$ soit supérieure à K_{s_1} (l'indice *o* correspond à l'instant du mélange).

$$\Pi_1 = \left(\frac{C_1V_1}{V_1+V_2}\right)\cdot\left(\frac{C_2V_2}{V_1+V_2}\right) > K_{s_1} \Leftrightarrow C_2 > \frac{K_{s_1}(V_1+V_2)^2}{C_1V_1V_2}$$

AN : $C_2 > 0{,}032\,mol.L^{-1}$.

b) $CaSO_{4(sd)} \rightleftharpoons Ca^{2+} + SO_4^{2-}$

à $t = 0$: (date de mélange) $\quad n_{o_1} \quad n_{o_2}$ (en mol)

à $t_{éq}$: $\quad n_{o_1} - x \quad n_{o_2} - x$ (en mol)

avec $n_{o_1} = C_1 V_1 = 5.10^{-4}$ mol et $n_{o_2} = C_2 V_2 = 1{,}5.10^{-2}$ mol.

$$K_{s_1} = [Ca^{2+}]_{éq} \cdot [SO_4^{2-}]_{éq} = \frac{(n_{o_1} - x) \cdot (n_{o_2} - x)}{V^2}$$

d'où : $x^2 - 1{,}55.10^{-2} x + 5{,}1.10^{-6} = 0$; les solutions de cette équation sont :

$x_1 = 3{,}5.10^{-4}$ mol et $x_2 = 1{,}51.10^{-2}$ mol (à rejeter car $x_2 > n_{o_2}$ (absurde)).

La masse du précipité est donc : $m = x_1 \cdot M_{CaSO_4}$. ***AN*** : $m = 4{,}76.10^{-2}$ g.

Exercice n°8 :

1°) Les réactions de dissolution de $CaSO_4$ et $BaSO_4$ ont pour équation :

$$CaSO_{4(sd)} \rightleftharpoons Ca^{2+} + SO_4^{2-}$$

$$BaSO_{4(sd)} \rightleftharpoons Ba^{2+} + SO_4^{2-}$$

Les produits de solubilité de chacun des électrolytes précédents s'écrivent respectivement : $K_{s_1} = [Ca^{2+}]_{éq} [SO_4^{2-}]_{éq}$; $K_{s_2} = [Ba^{2+}]_{éq} [SO_4^{2-}]_{éq}$

Le début de précipitation dans (S) est possible si la concentration en ions SO_4^{2-} est :

$$\begin{cases} [SO_4^{2-}] = \dfrac{K_{s_1}}{[Ca^{2+}]} ; & \text{pour } CaSO_4 . \\ [SO_4^{2-}] = \dfrac{K_{s_2}}{[Ba^{2+}]} ; & \text{pour } BaSO_4 . \end{cases}$$

Or, $[Ca^{2+}] = [Ba^{2+}] = 0{,}1$ mol.L^{-1} et $K_{s_2} < K_{s_1}$, on en déduit que :

$\dfrac{K_{s_2}}{[Ba^{2+}]} < \dfrac{K_{s_1}}{[Ca^{2+}]}$; la molarité $[SO_4^{2-}] = \dfrac{K_{s_2}}{[Ba^{2+}]}$ sera atteinte en premier lieu : c'est donc $BaSO_4$ qui précipite le premier.

2°)a) Le précipité de $CaSO_4$ peut commencer à se former quand la concentration en ions SO_4^{2-} est telle que : $[SO_4^{2-}] = \dfrac{K_{s_1}}{[Ca^{2+}]}$.

AN : $[SO_4^{2-}] = \dfrac{2{,}4.10^{-5}}{0{,}1} = 2{,}4.10^{-4}$ mol.L^{-1}

b) $[Ba^{2+}] = \dfrac{K_{s_2}}{[SO_4^{2-}]}$. ***AN*** : $[Ba^{2+}] = \dfrac{1{,}1.10^{-10}}{2{,}4.10^{-4}} = 4{,}58.10^{-7}$ mol.L^{-1}.

Ca^{2+} va juste commencer à précipiter, donc sa molarité n'a pas encore changée : $[Ca^{2+}] = 0{,}1\ mol.L^{-1}$.

Equilibre en phase gazeuse

Exercice n°9 :

$$H_{2(g)} + I_{2(g)} \rightleftarrows 2HI_{(g)}$$

1°) D'après la loi d'action de masse : $K = \dfrac{[HI]^2_{éq}}{[H_2]_{éq} \cdot [I_2]_{éq}}$.

2°)a) $[I_2]_i = \dfrac{n_{i(I_2)}}{V_{T(g)}} = 4.10^{-2}\ mol.L^{-1}$; $[H_2]_i = \dfrac{n_{i(H_2)}}{V_{T(g)}} = 4.10^{-2}\ mol.L^{-1}$;

$[HI]_i = \dfrac{n_{i(HI)}}{V_{T(g)}} = 6.10^{-2}\ mol.L^{-1}$.

b) $\Pi = \dfrac{[HI]_i^2}{[H_2]_i \cdot [I_2]_i} = 2{,}25$

c) $\Pi < K$: le système évolue dans le sens de la réaction (1).

3°)a)

	$H_{2(g)}$	+ $I_{2(g)}$	$\rightleftharpoons$	$2HI_{(g)}$	
à t_i :	0,4	0,4		0,6	(en mol)
à $t_{éq}$:	0,4 – x	0,4 – x		0,6 + 2 x	(en mol)

Remarquons que K peut s'exprimer en fonction des nombres de moles des constituants, en effet ; $K = \dfrac{\left(\dfrac{n_{HI}}{V_{T(g)}}\right)^2_{éq}}{\left(\dfrac{n_{H_2}}{V_{T(g)}}\right)_{éq} \cdot \left(\dfrac{n_{I_2}}{V_{T(g)}}\right)_{éq}}$.

Soit : $K = \dfrac{(n_{HI})^2_{éq}}{(n_{H_2})_{éq} \cdot (n_{I_2})_{éq}} = \dfrac{(0{,}6+2x)^2}{(0{,}4-x)^2} = 49 = 7^2 \Leftrightarrow 0{,}6 + 2x = 7(0{,}4 - x)$

$\Leftrightarrow x = 0{,}24\ mol$, d'où : $n_{H_2})_{éq} = 0{,}16\ mol \Rightarrow [H_2]_{éq} = 1{,}6.10^{-2}\ mol.L^{-1}$

$n_{I_2})_{éq} = 0{,}16\ mol \Rightarrow [I_2]_{éq} = 1{,}6.10^{-2}\ mol.L^{-1}$

$n_{HI})_{éq} = 1{,}08\ mol \Rightarrow [HI]_{éq} = 10{,}8.10^{-2}\ mol.L^{-1}$

b) Une variation de pression n'influe pas sur l'état d'équilibre du système car le nombre de mole total du mélange gazeux est constant ; en effet, la somme des coefficients stœchiométriques relatifs aux réactifs est égale à celle des produits.

c)*) Pour $T' > T$,on a $K' < K$. La diminution de K est engendrée par une diminution de $[HI]_{éq}$ et d'une augmentation de $[H_2]_{éq}$ et $[I_2]_{éq}$. L'équilibre est donc déplacé dans le sens de la réaction (2).

*) D'après la loi de modération relative à la température, toute élévation de température d'un système initialement en équilibre entraîne le déplacement de celui-ci dans le sens de la réaction endothermique. La réaction (2) est donc endothermique, par conséquent la réaction de synthèse de HI (sens (1)) est exothermique.

Exercice n°10 :

1°)a) Retirer x mole de NO_2, revient à diminuer la concentration molaire de ce constituant. D'après la loi de modération relative aux concentrations molaires, l'équilibre se déplace dans le sens tendant à s'opposer à cette diminution. Le système évoluera donc dans le sens de la réaction (1).

b) L'intensification de la coloration prouve le déplacement de l'équilibre dans le sens de la réaction (1). D'après la loi de modération relative à la température, toute élévation de la température entraîne un déplacement d'équilibre dans le sens de la réaction endothermique. La réaction (1) est donc endothermique.

c) Le fait que le mélange devient incolore, prouve que l'équilibre s'est déplacé dans le sens de la réaction (2) par augmentation de la pression.
D'après la loi de modération relative à la pression, toute augmentation de la pression totale d'un système gazeux initialement en équilibre dynamique, entraîne le déplacement de cet équilibre dans le sens de la diminution de la pression totale donc du nombre de mole total du mélange gazeux et inversement.

2°)a) $K_c = \dfrac{[NO_2]^2_{éq}}{[N_2O_4]_{éq}} = \dfrac{n_{NO_2})^2_{éq}}{n_{N_2O_4})_{éq}} \dfrac{1}{V}$. ***AN***: $K_c = 6{,}82.10^{-3}$

b) Soit t = 0, la date de perturbation ;

	$N_2O_{4(g)}$	$\rightleftharpoons$	$2\,NO_{2(g)}$	
à $t = 0$:	0,6 + 0,4		0,3	(en mol)
à $t_{éq}$:	1 − x		0,3 + 2 x	(en mol)

$$K_c = \frac{(0{,}3+2x)^2}{1-x}\frac{1}{22} \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + 1{,}35x - 0{,}06 = 0$$

La solution physiquement acceptable de cette équation est : $x = 0{,}04$ mol.
La composition du mélange sera alors : $n_{N_2O_4} = 0{,}96$ mol et $n_{NO_2} = 0{,}38$ mol.

Exercice n°11 :

1°)a)

	$4HCl_{(g)}$	+ $O_{2(g)}$	$\underset{\nu}{\overset{\Delta}{\rightleftharpoons}}$	$2Cl_{2(g)}$	+ $2H_2O_{(g)}$	
à $t = 0$:	1,5	0,3		0	0	(en mol)
à $t_{éq}$:	$1,5 - 4x$	$0,3 - x$		$2x$	$2x$	(en mol)

$n_{H_2O})_{éq} = 2x = 0,16$ mol ; d'où : $x = 0,08$ mol.

La composition du mélange à l'équilibre est alors :

$$\begin{cases} n_{H_2O})_{éq} = n_{Cl_2})_{éq} = 0,16\,\text{mol} \\ n_{O_2})_{éq} = 0,22\,\text{mol} \quad \text{et} \quad n_{HCl})_{éq} = 1,18\,\text{mol} \end{cases}$$

b) $K_c = \dfrac{[H_2O]^2_{éq} \cdot [Cl_2]^2_{éq}}{[O_2]_{éq} \cdot [HCl]^4_{éq}} = V \cdot \dfrac{(n_{H_2O})^2_{éq} \cdot (n_{Cl_2})^2_{éq}}{(n_{O_2})_{éq} \cdot (n_{HCl})^4_{éq}}$. ***AN***: $K_c = 3,07.10^{-3}$.

2°)a) Le nombre de mole de HCl consommé à l'équilibre à la nouvelle température T' est : $n_{HCl} = 4x = \dfrac{17,2 \times 15}{100}$ d'où : $x = 6,45.10^{-2}$ mol.

La composition du mélange à l'équilibre est :

$$\begin{cases} n_{H_2O})_{éq} = n_{Cl_2})_{éq} = 12,9.10^{-2}\,\text{mol} \\ n_{O_2})_{éq} = 23,55.10^{-2}\,\text{mol} \quad \text{et} \quad n_{HCl})_{éq} = 124,2.10^{-2}\,\text{mol} \end{cases}$$

b) Une nouvelle application numérique sur l'expression de la constante d'équilibre donne : $K'_c = 98,83.10^{-5}$.

c) $K'_c < K_c$ pour $T' > T$: En élevant la température, K'_c a diminué, donc $[Cl_2]_{éq}$ et $[H_2O]_{éq}$ diminuent, alors que $[O_2]_{éq}$ et $[HCl]_{éq}$ augmentent par rapport aux valeurs relatives à la température T. L'équilibre s'est donc déplacé dans le sens de la réaction (2).

D'après la loi de modération, la réaction (2) est endothermique et par suite, la réaction (1) est exothermique.

3°) A température constante, une augmentation de pression a pour effet de déplacer l'équilibre dans le sens de la diminution du nombre de mole total du mélange. Dans notre cas, c'est dans le sens de la réaction (1) que le système évoluera si on augmente la pression, à température constante.

Exercice n°12 :

1°) La pression étant un facteur d'équilibre vue que les réactions s'effectuent avec variation du nombre de mole total, d'après la loi de modération, pour favoriser la dissociation de l'ammoniac à température constante (c'est-à-dire augmenter le nombre de mole total), il faudra diminuer la pression.

2°) D'après la loi de modération, la réaction de synthèse de l'ammoniac (exothermique) est favorisée par une diminution de la température à pression constante.

3°) La constante d'équilibre relative à la réaction de dissociation de l'ammoniac est donnée par la loi d'action de masse : $K_c = \dfrac{[N_2]_{éq} \cdot [H_2]^3_{éq}}{[NH_3]^2_{éq}}$.

	$2NH_{3(g)}$	$\rightleftharpoons$	$N_{2(g)}$	+	$3H_{2(g)}$	
à $t = 0$:	n_o		0		0	(en mol)
à $t_{éq}$:	$n_o - 2x$		x		$3x$	(en mol)

$$K_c = \frac{\left(\frac{x}{V}\right)\cdot\left(\frac{3x}{V}\right)^3}{\left(\frac{n_o - 2x}{V}\right)^2} = \frac{1}{V^2}\,\frac{27x^4}{(n_o - 2x)^2} \qquad (1)$$

Exprimons x en fonction de $\alpha_{éq}$: $\alpha_{éq} = \dfrac{2x}{n_o} \Rightarrow x = \dfrac{n_o}{2}\alpha_{éq}$.

Remplaçons x par son expression dans (1) :

$$K_c = \frac{1}{V^2}\,\frac{27\frac{n_o^4}{16}\alpha_{éq}^4}{(n_o - n_o\,\alpha_{éq})^2} = \left(\frac{\sqrt{27}\,n_o}{4V}\,\frac{\alpha_{éq}^2}{(1-\alpha_{éq})}\right)^2 \qquad (2)$$

4°) En remplaçant n_o et V par leurs valeurs, la relation (2) devient :

$$\sqrt{K_c} = \frac{3\sqrt{27}}{4}\,\frac{\alpha_{éq}^2}{(1-\alpha_{éq})} \Rightarrow 9\sqrt{3}\,\alpha_{éq}^2 = 4(1-\alpha_{éq})\sqrt{K_c}$$

$$\Rightarrow \alpha_{éq}^2 + \frac{4}{9}\sqrt{\frac{K_c}{3}}\,\alpha_{éq} - \frac{4}{9}\sqrt{\frac{K_c}{3}} = 0, \text{ de la forme : } \alpha_{éq}^2 + A\alpha_{éq} - A = 0$$

avec $A = \dfrac{4}{9}\sqrt{\dfrac{K_c}{3}} = 1{,}045.$

Les solutions de cette équation du second degré sont :

$\alpha_{éq_1} = \dfrac{-1{,}045 - 2{,}3}{2} < 0$; à rejeter car $0 \leq \alpha \leq 1$

$\alpha_{éq_2} = \dfrac{-1{,}045 + 2{,}3}{2} = 0{,}627$.

La composition du mélange à l'équilibre dynamique est alors :

$[NH_3]_{éq} = \dfrac{3}{V}(1-\alpha_{éq}) = 1{,}12\ \text{mol.L}^{-1}$; $[N_2]_{éq} = \dfrac{3}{2V}\alpha_{éq} = 0{,}94\ \text{mol.L}^{-1}$

et $[H_2]_{éq} = \dfrac{9}{2V}\alpha_{éq} = 2{,}82\ \text{mol.L}^{-1}$.

Exercice n°1 :

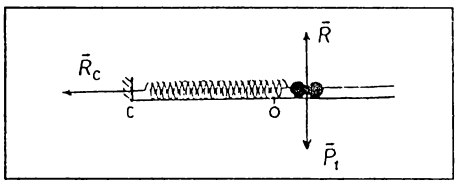
1°) Système (S) :{S_1, S_2, R }.

A un instant quelconque après le choc, la vitesse de l'ensemble (S_1, S_2) est v et la déformation du ressort est $\Delta l = x$. L'énergie mécanique de (S) est alors :

$E = E_{c(S_1+S_2)} + E_{pe(R)} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}k x^2$.

Le théorème de la variation de l'énergie mécanique appliqué à (S) entre deux instants quelconques s'écrit :

$\Delta E\}_{t_1}^{t_2} = \sum W_{\vec{F}_{ext}}\}_{t_1}^{t_2} + \sum W_{\vec{F}_{int\ dissip}}\}_{t_1}^{t_2}$.



Bilan des forces extérieures :

$\vec{P}_t, \vec{R}$ et $\vec{R}_C$; avec $\vec{P}_t = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$.

Aucune force intérieure dissipative.

$W_{\vec{P}_t} = W_{\vec{R}} = 0$ car $\vec{P}_t$ et $\vec{R}$ sont perpendiculaires au déplacement.

$W_{\vec{R}_C} = 0$ car son point d'application C est fixe.

$\Delta E = 0 \Rightarrow$ le système (S) est conservatif.

L'énergie mécanique du système (S) après le choc, reste constante.

A l'instant où le ressort atteint son raccourcissement maximal :

$v = 0$ et $x = x_M$; donc $E = \frac{1}{2}k x_M^2$. ***AN***: $E = 12{,}5.10^{-3}$ J.

2°) Avant le choc : $E_1 = E_{c(S_1)} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2$. ***AN***: $E_1 = 5.10^{-2}$ J.

$\Delta E = E - E_1$. ***AN***: $\Delta E = -37{,}5.10^{-3}$ J; $\Delta E < 0$: au cours du choc , l'énergie mécanique n'est pas conservée. Ceci s'interprète par l'existence des forces intérieures d'interaction entre S_1 et S_2, non conservatives, telle que la somme de leur travaux est non nulle.

3°) Le choc est mou ; il y a conservation de la quantité de mouvement au cours du choc :

$\vec{p}_{Juste\ avant\ le\ choc} = \vec{p}_{Juste\ après\ le\ choc}$

$\Rightarrow \quad m_1 \vec{v}_1 = (m_1 + m_2)\vec{v}_2 \quad \Rightarrow \quad m_1 \|\vec{v}_1\| = (m_1 + m_2)\|\vec{v}_2\| \qquad (1)$

Juste après le choc : $E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 \qquad (2)$

La résolution du système des deux équations (1) et (2) conduit à :

$$\|\vec{v}_2\| = \frac{2E}{m_1\|\vec{v}_1\|} \quad \text{et} \quad m_2 = m_1\left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right).$$

AN: $\|\vec{v}_2\| = 0{,}25\ m.s^{-1}$ et $m_2 = 300$ g.

Exercice n°2 :

1°) Choisissons comme système le solide (S') : le théorème de la variation de l'énergie cinétique appliqué à (S') entre les instants correspondant à la date t_1 juste après le choc et à la date t_2 où l'écartement est maximal s'écrit :

$$\Delta E_c\}_{t_1}^{t_2} = \sum W_{\vec{F}_{ext}}\}_{t_1}^{t_2}$$

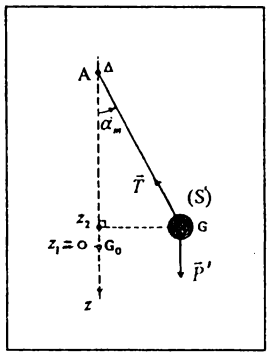
$$E_{c_2} - E_{c_1} = W_{\vec{P}'(G_0 \to G)} + W_{\vec{T}(G_0 \to G)}$$

Soit $0 - \frac{1}{2}m'v_{S'}'^2 = \left\|\vec{P}'\right\|(z_2 - z_1)$

avec $W_{\vec{T}(G_0 \to G)} = 0$ car le moment de $\vec{T}$ par rapport à Δ est nul. D'où : $\frac{1}{2}m'v_{S'}'^2 = m'\left\|\vec{g}\right\| l(1-\cos\alpha_m)$

$$\Rightarrow \left\|\vec{v}_{S'}'\right\| = \sqrt{2\left\|\vec{g}\right\| l(1-\cos\alpha_m)}$$

AN : $\left\|\vec{v}_{S'}'\right\| = 2$ m.s^{-1}.



2°) Le Choc est élastique ; il y a alors :

- conservation de la quantité de mouvement de (S, S') : $\vec{p}_{\substack{juste\ avant \\ le\ choc}} = \vec{p}_{\substack{juste\ après \\ le\ choc}}$

$$\Rightarrow \vec{p}_S + \vec{p}_{S'} = \vec{p}_S' + \vec{p}_{S'}'$$

$$\Rightarrow m\vec{v}_S + \vec{0} = m\vec{v}_S' + m'\vec{v}_{S'}'$$

Après projection sur l'axe horizontal commun aux vecteurs vitesses, on obtient : $mv_S = mv_S' + m'v_{S'}'$

- conservation de l'énergie cinétique de (S, S') : $E_{c(S)} + E_{c(S')} = E'_{c(S)} + E'_{c(S')}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_S^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_S'^2 + \frac{1}{2}m'v_{S'}'^2.$$

On obtient le système d'équation suivant : $\begin{cases} m(v_S - v_S') = m'v_{S'}' & (1) \\ m(v_S^2 - v_S'^2) = m'v_{S'}'^2 & (2) \end{cases}$

$$\frac{(2)}{(1)} \text{ donne : } v_S + v_S' = v_{S'}' \qquad (3)$$

La résolution du système d'équations (1) et (3) donne :

$$v_S = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m'}{m}\right)v_{S'}' \quad \text{et} \quad v_S' = v_{S'}' - v_S .$$

AN : $v_S = 1{,}5\, m.s^{-1}$ et $v_S' = 0{,}5\, m.s^{-1}$.

3°) Appliquons le théorème de la variation de l'énergie cinétique au solide (S) soumis aux forces extérieures : $\vec{P}, \vec{F}$ et $\vec{R}$; entre les dates t_M et t_N (date juste avant le choc).

$$\Delta E_c\Big]_{t_M}^{t_N} = W_{\vec{P}(M\to N)} + W_{\vec{F}(M\to N)} + W_{\vec{R}(M\to N)}$$

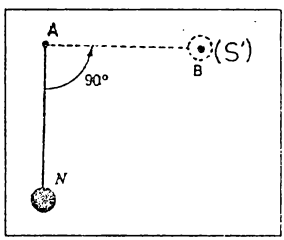
$$E_{c_N} - E_{c_M} = 0 + \|\vec{F}\| MN + 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_S^2 - 0 = \|\vec{F}\| MN ; \text{ d'où : } \|\vec{F}\| = \frac{mv_S^2}{2MN}$$

AN : $\|\vec{F}\| = 5.10^{-2}$ N.

4°) Pour que (S') atteigne l'horizontale (AB), donc $\alpha_m = \frac{\pi}{2}$ rad, il faut que $\|\vec{v}_B\| \geq 0$.

Le théorème de la variation de l'énergie cinétique appliqué au solide (S') entre les dates t'_N (date juste après le choc) et t_B (date de passage de (S') par B) .



$$\Delta E_c\Big]_{t'_N}^{t_B} = W_{\vec{P}(N\to B)} + W_{\vec{T}(N\to B)}$$

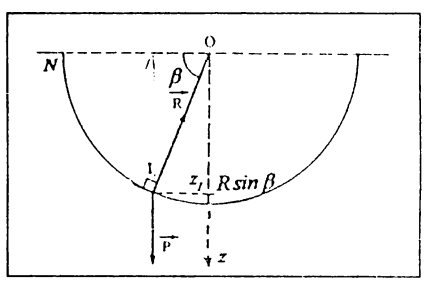
$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_{S'}'^2 = -m\|\vec{g}\| l + 0 \Rightarrow v_B^2 = v_{S'}'^2 - 2\|\vec{g}\| l.$$

$$v_B \geq 0 \Rightarrow v_{S'}'^2 - 2\|\vec{g}\| l \geq 0 \Rightarrow \|\vec{v}_{S'}'\| \geq \sqrt{2\|\vec{g}\| l} ;$$

soit $\|\vec{v}_{S'}'\|_{min} = \sqrt{2\|\vec{g}\| l}$.

AN : $\|\vec{v}_{S'}'\|_{min} = 2{,}82\ \text{m.s}^{-1}$.

5°)a) Appliquons le théorème de la variation de l'énergie cinétique au solide (S) entre les instants de dates t_N et t_I :



$$\Delta E_c\Big]_{t_N}^{t_I} = W_{\vec{P}(N\to I)} + W_{\vec{R}(N\to I)}$$

$$\frac{1}{2}mv_I^2 - 0 = m\|\vec{g}\| R\sin\beta \qquad (1)$$

$W_{\vec{R}(N\to I)} = 0$ car $\vec{R} \perp$ au déplacement

d'où $\|\vec{v}_I\| = \sqrt{2\|\vec{g}\| R\sin\beta}$;

AN : $\|\vec{v}_I\| = 3{,}95\ m.s^{-1}$.

Afin de déterminer $\vec{R}$, appliquons la R. F. D au solide (S) : $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$.

Projetons sur l'axe normal $(I,\vec{n})$, on aura : $\|\vec{R}\| - \|\vec{P}\|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = ma_N$

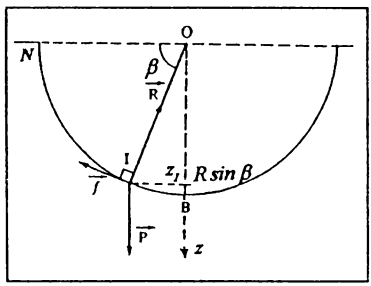
$$\Rightarrow \|\vec{R}\| = m\left(\|\vec{g}\|\sin\beta + \frac{v_I^2}{R}\right)$$

Les caractéristiques de $\vec{R}$ sont alors : · direction : (OI)

· sens : centripète $(I \to O)$

· intensité : $\|\vec{R}\| = 2{,}6$ N.

b) Appliquons de nouveau le théorème de la variation de l'énergie cinétique à (S) entre les dates t_N et t_I :



$\Delta E_c\}_{t_N}^{t_I} = W_{\vec{P}(N\to I)} + W_{\vec{R}(N\to I)} + W_{\vec{f}(N\to I)}$

$\frac{1}{2}mv_I'^2 - 0 = m\|\vec{g}\|R\sin\beta + 0 + (-\|\vec{f}\|R\beta)$;

d'où : $\|\vec{f}\| = \frac{1}{R\beta}\left(m\|\vec{g}\|R\sin\beta - \frac{1}{2}mv_I'^2\right)$

En tenant compte de (1) : $\|\vec{f}\| = \frac{m}{2R\beta}(v_I^2 - v_I'^2)$

avec β en rad.

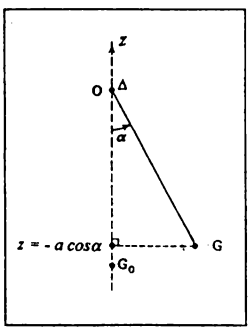
AN : $\|\vec{f}\| = 0{,}35$ N.

Exercice n°3 :

1°) Exprimons l'altitude z de la tige en fonction de α : $z = -a\cos\alpha$.

D'après la courbe, l'origine de E_{p_p} du système tige-terre correspond à $\alpha = 0$ (position d'équilibre stable de la tige), soit alors $z = -a$.

Le niveau de référence des énergies potentielles est alors le plan horizontal passant par le centre d'inertie G_o de la tige lorsqu'elle est dans sa position d'équilibre stable.

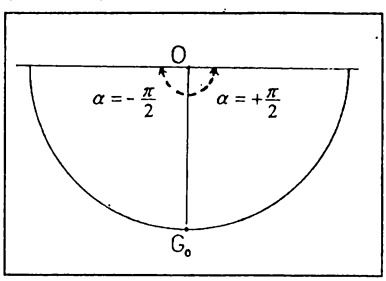


2°) $E_p(z) = m\|\vec{g}\|z + E_{p_o} = -m\|\vec{g}\|a\cos\alpha + E_{p_o}$; or $E_p(\alpha = 0) = -m\|\vec{g}\|a + E_{p_o} = 0$

$\Rightarrow E_{p_o} = m\|\vec{g}\|a$; d'où : $E_p(\alpha) = m\|\vec{g}\|a(1 - \cos\alpha)$.

1er Cas : $E_1 = 1{,}2$ J.

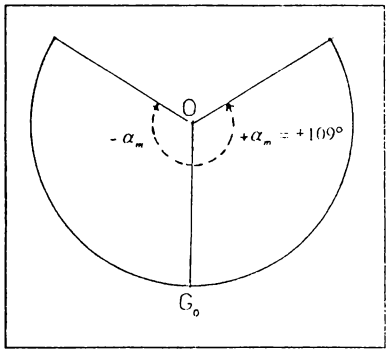
a) La droite (1) coupe la courbe $E_p(\alpha)$ en deux points d'abscisses respectives : $\alpha = +\frac{\pi}{2}$ rad et $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ rad. Pour ces deux valeurs de α , $E_1 = E_{p_{max}}$; donc $E_c = 0$. Le centre d'inertie G de la tige décrit un demi-cercle de centre O et de rayon a.



b) $E_1 = E_{p_{max}} = m\|\vec{g}\|a$; d'où : $m = \frac{E_1}{\|\vec{g}\|a}$. ***AN*** : $m = 0{,}48$ Kg.

2ème Cas : $E_2 = 1{,}6$ J.

a) $E_{p_{max}} = m\|\vec{g}\|a(1 - \cos\alpha_m) = E_2$; d'où : $\cos\alpha_m = 1 - \frac{E_2}{m\|\vec{g}\|a}$.



AN: $\alpha_m = \pm 109°$. Le centre d'inertie G de la tige décrit un arc de cercle de centre O, de rayon a et d'angle $\theta = 2\alpha_m$.

NB : Une valeur approchée de α_m peut être déterminée graphiquement à partir de la coube.

b) Le passage par la position d'équilibre correspond à $E_p = E_{p_{min}} = 0$, soit: $E_c = E_{c_{max}} = E_2$. D'autre part,

$E_{c_{max}} = \frac{1}{2} J_{/\Delta} \alpha_m'^2 = \frac{1}{2} J_{/\Delta} \frac{v_m^2}{a^2}$;

d'où $\|\vec{v}_m\| = \sqrt{\frac{2E_2 a^2}{J_{/\Delta}}}$. Or $J_{/\Delta} = \frac{1}{12} m(2a)^2 + ma^2 = \frac{4}{3} ma^2$; donc $\|\vec{v}_m\| = \sqrt{\frac{3E_2}{2m}}$.

AN : $\|\vec{v}_m\| = 2{,}23\,\text{m.s}^{-1}$.

c) $E_c = 0{,}4$ J $\Rightarrow$ $E_p = E_2 - E_c = 1{,}2\,\text{J} = E_1$

C'est la valeur de l'énergie mécanique correspondant au cas précédent ($\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ rad).

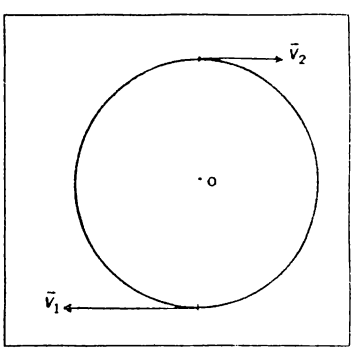
3ème Cas: $E_3 = 3{,}6$ J.

a) $E_3 > E_{p_{max}} = 2{,}4$ J , il n'y a plus de « barrière de potentiel » ;

$E_c = E_3 - E_p > 0$.

On observera une rotation permanente de la tige dans le même sens. La trajectoire de G sera alors un cercle de centre O et de rayon a.

b) E_p passe par deux valeurs extrémales, il en sera de même pour E_c.



$E_{c_{max}} = \frac{1}{2} J_{/\Delta} \alpha_1'^2 = \frac{2}{3} m v_1^2 = E_3 - E_{p_{min}} = E_3$;

d'où: $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\frac{3E_3}{2m}}$. ***AN***: $\|\vec{v}_1\| = 3{,}35\ \text{m.s}^{-1}$.

De même : $E_{c_{min}} = \frac{1}{2} J_{/\Delta} \alpha_2'^2 = \frac{2}{3} m v_2^2 = E_3 - E_{p_{max}}$;

d'où: $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{\frac{3(E_3 - E_{p_{max}})}{2m}}$.

AN: $\|\vec{v}_2\| \approx 1{,}94\,\text{m.s}^{-1}$.

3°) $\frac{\|\vec{v}_{max}\|}{\|\vec{v}_{min}\|} = 2 \Rightarrow \frac{E_{c_{max}}}{E_{c_{min}}} = 4 = \frac{E}{E - E_{p_{max}}}$;

d'où: $E = \frac{4}{3} E_{p_{max}}$ avec $E_{p_{max}} = 2{,}4$ J. ***AN***: $E = 3{,}2$ J.

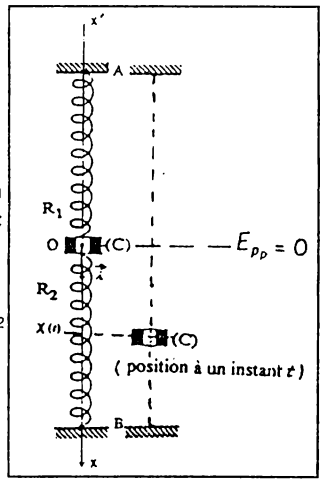
Exercice n°4 :

1°) Système : { C, R_1, R_2, terre }.

$E_{p_1} = E_{p_{p(C+terre)}} + E_{p_{e(R_1)}} + E_{p_{e(R_2)}}$

$= 0 + \frac{1}{2}k(\Delta l_1)^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l_2)^2$;

or $|\Delta l_1| = |\Delta l_2| = l - l_o$; d'où : $E_{p_1} = k(l-l_o)^2$.



2°)a) Ni l'altitude du corps (C), ni la déformation de chacun des deux ressorts n'ont changé, donc l'énergie potentielle du système reste inchangée.

b) $E_{p_2} = E_{p_{p(C+terre)}} + E_{p_{e(R_1)}} + E_{p_{e(R_2)}}$

$= -m\|\vec{g}\|x + \frac{1}{2}k(l-l_o+x)^2 + \frac{1}{2}k(l-l_o-x)^2$

$= -m\|\vec{g}\|x + k(l-l_o)^2 + kx^2$

c) $E = E_{c(C)} + E_{p_2}$

$= \frac{1}{2}mv^2 - m\|\vec{g}\|x + k(l-l_o)^2 + kx^2$.

* Le système est conservatif car d'une part, il n'existe aucune force intérieure dissipative et d'autre part les seules forces extérieures agissant sur le système, sont les réactions des supports : $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$ tels que $W_{\vec{R}_A} = W_{\vec{R}_B} = 0$.

$\Delta E = 0 \Rightarrow E$ est constante, donc $E = E(t=0) = E_{p_1} = k(l-l_o)^2$.

AN: $E = 5.10^{-2}$ J.

* Montrons que la vitesse du solide s'annule en deux positions :

$E = E_{p_1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - m\|\vec{g}\|x + k(l-l_o)^2 + kx^2 = k(l-l_o)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - m\|\vec{g}\|x + kx^2 = 0$

Pour $v = 0$, on a : $x(kx - m\|\vec{g}\|) = 0$; cette équation admet deux solutions :

Il existe donc physiquement deux positions d'abscisses x_1 et x_2 pour lesquelles la vitesse s'annule : $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{m\|\vec{g}\|}{k} = 12{,}5\,\text{cm}$.

Exercice n°5 :

PARTIE A/

1°) On rappelle que le centre d'inertie G d'un système formé de n points matériels A_i respectivement de masse m_i est défini par : $\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_i m_i}$,

O étant l'origine d'un repère choisi.

Pour le système (S) :{ tige (t), bille (B) } ;

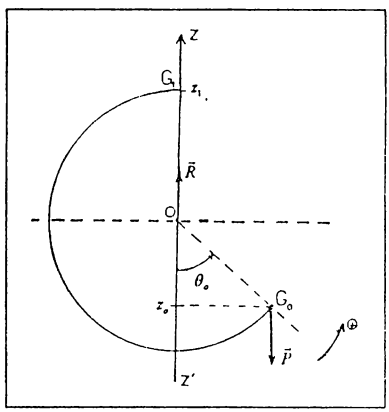
$$\overrightarrow{OG}=\frac{m_t\overrightarrow{OG_t}+m_B\overrightarrow{OB}}{m_t+m_B}=\frac{m_t\overrightarrow{OO}+m_B\overrightarrow{OB}}{m_t+m_B}=\frac{m_B}{2m_B}\overrightarrow{OB};\quad \text{d'où } \overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

et par suite $\left\|\overrightarrow{OG}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OB}\right\|=\frac{L}{2}$

2°)a) Voir cours.

$\Delta E_c\}_{t_1}^{t_2}=\sum W_{\vec{F}_{ext}}\}_{t_1}^{t_2}+\sum W_{\vec{F}_{int}}\}_{t_1}^{t_2}$ (Forme mathématique du théorème).

b) Appliquons le théorème de la variation l'énergie cinétique au système (S) entre les instants de dates : t_o de lancement et t_1 à laquelle le système atteint sa position d'équilibre instable .



$\Delta E_c\}_{t_o}^{t_1}=W_{\vec{R}}+W_{\vec{P}_S(G_o\to G_1)}$;

avec $\vec{P}_S=2m\vec{g}$ et $W_{\vec{R}(o\to 1)}=0$. On a donc :

$$\frac{1}{2}J_{S/\Delta}\theta_1'^2-\frac{1}{2}J_{S/\Delta}\theta_o'^2=-2m\left\|\vec{g}\right\|(z_1-z_o)$$

avec $z_1=OG=\frac{L}{2}$; $z_o=-OG\cos\theta=-\frac{L}{2}\cos\theta_o$

et $J_{S/\Delta}=J_o+J_{B/\Delta}=\frac{1}{3}mL^2+mL^2=\frac{4}{3}mL^2$.

On en déduit alors : $\left|\theta_o'\right|=\sqrt{\theta_1'^2+\frac{3\left\|\vec{g}\right\|}{2L}(1+\cos\theta_o)}$

$\left|\theta_o'\right|$ est minimale lorsque θ_1' est nulle ; d'où : $\left|\theta_o'\right|_{min}=\sqrt{\frac{3\left\|\vec{g}\right\|}{2L}(1+\cos\theta_o)}$.

Pour $\theta_o=\frac{\pi}{3}$ rad, $\left|\theta_o'\right|_{min}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\left\|\vec{g}\right\|}{L}}$. ***AN***: $\left|\theta_o'\right|_{min}=10{,}6\ \text{rad.s}^{-1}$.

3°)a) Système : { tige , bille, terre } = { S, terre }.

$E=E_{c_{(S)}}+E_{p(S+terre)}=\frac{1}{2}J_{S/\Delta}\theta'^2+2m\left\|\vec{g}\right\|z$; avec $z=-\frac{L}{2}\cos\theta$

$\Rightarrow\ E=\frac{2}{3}mL^2\theta'^2-m\left\|\vec{g}\right\|L\cos\theta$.

b) $\Delta E\}_{t_1}^{t_2}=\sum W_{\vec{F}_{ext}}\}_{t_1}^{t_2}+\sum W_{\vec{F}_{int\ dissip}}\}_{t_1}^{t_2}$

Il n'y a pas de forces intérieures dissipatives agissant sur le système, en plus ; l'unique force extérieure est la réaction $\vec{R}$ de l'axe (Δ) dont le travail est nul donc $\Delta E = 0$: le système est conservatif. Soient :

t_1 date de libération de (S);

$\theta(t_1)=\theta_1=+\frac{\pi}{2}$ rad et $\theta'(t_1)=\theta_1'=0$, donc $E_1=\frac{2}{3}mL^2\theta_1'^2-m\left\|\vec{g}\right\|L\cos\theta_1=0$

t_2 date du premier passage de (S) par sa position d'équilibre stable :

$\theta(t_2)=\theta_2=0$ et $\theta'(t_2)=\theta'_2$.

E est constante : $E_1=E_2$

$$\Leftrightarrow \qquad 0=\frac{2}{3}mL^2\theta_2'^2-m\|\vec{g}\|L\cos\theta_2 .$$

D'où : $\theta'_2=-\sqrt{\frac{3\|\vec{g}\|}{2L}\cos\theta_2}=-\sqrt{\frac{3\|\vec{g}\|}{2L}}$.

$v_2=L\cdot\theta'_2=-\sqrt{\frac{3\|\vec{g}\|L}{2}}$. ***AN***: $v_2=-1{,}73\,\text{m.s}^{-1}$.

NB: La solution θ'_2 choisie est négative car le mouvement lors du premier passage par la position d'équilibre stable s'effectue dans le sens négatif.

PARTIE B/

En tenant compte du moment du couple de frottement, le système n'est plus conservatif :

$\Delta E\}_{t_1}^{t_2}=W_f\}_{t_1}^{t_2} \Leftrightarrow E_2-E_1=M_o(\theta_2-\theta_1)$

$$\begin{cases} E_1=0 \\ \theta_1=\frac{\pi}{2}\,\text{rad} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E_2=\frac{2}{3}mL^2\theta_2'^2-m\|\vec{g}\|L\cos\theta_2=\frac{2}{3}mv_2'^2-\|\vec{g}\|L \\ \theta_2=0 \end{cases}$$

d'où : $M_o=-\frac{E_2}{\theta_1}=-\frac{m}{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3}v_2'^2-\|\vec{g}\|L\right)$. ***AN***: $M_o=0{,}099\approx 0{,}1\,\text{N.m}$.

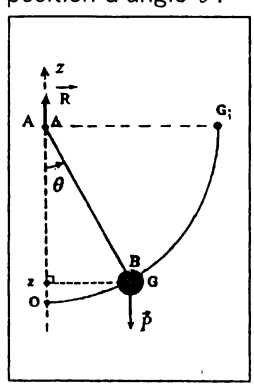
Exercice n°6 :

1°) Appliquons le théorème de la variation de l'énergie cinétique au système pendule. Soient t_i : date de libération du pendule,

t : date de passage du pendule par la position d'angle θ.

$\Delta E_c\}_{t_i}^{t} = W_{\vec{P}(G_i\to G)} + W_{\vec{R}}$

$E_c-0=m\|\vec{g}\|L\cos\theta+0 \Rightarrow E_c=m\|\vec{g}\|L\cos\theta$.



2°)a) D'après la courbe, $E_p=0$ pour $\cos\theta=1$;

soit $\theta=0$. Or $z=L(1-\cos\theta)$, donc pour $\theta=0$, $z=0$. Le plan de référence est alors le plan horizontal passant par le centre d'inertie de B à l'équilibre stable.

b) $E_p(z)=m\|\vec{g}\|z$. Remplaçons z par son expression en fonction de θ, il vient :

$E_p(\theta)=m\|\vec{g}\|L(1-\cos\theta)=-m\|\vec{g}\|L\cos\theta+m\|\vec{g}\|L$,

de la forme : $E_p(\theta)=a\cos\theta+b$.

E_p est une fonction affine de $\cos\theta$, la courbe $E_p = f(\cos\theta)$ est donc une portion de droite de pente $a = -m\|\vec{g}\|L < 0$.

c) D'après 1°) E_c est une fonction linéaire de $\cos\theta$, sa courbe représentative est donc une droite qui passe par l'origine. D'autre part l'énergie mécanique $E = E_c + E_p = m\|\vec{g}\|L = C^{te}$: le système est conservatif.

AN: $E = 0{,}56$ J.

d) D'après la courbe :

$E_p = E_c$ pour $\cos\theta = 0{,}5$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ rad.

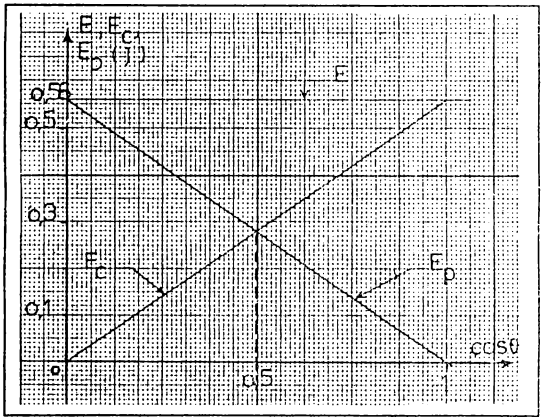
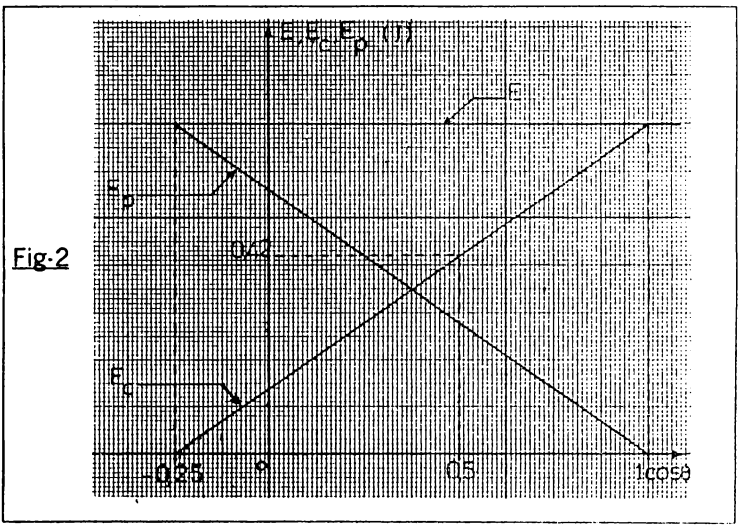


Fig-1

3°)a) La nouvelle énergie totale du pendule à l'instant de lancement est : $E_1 = E_{c_1} + E_{p_1} = 0{,}14 + 0{,}56 = 0{,}70$ J.

Le système restant conservatif, à chaque instant $E = E_1$, donc la courbe $E = f(\cos\theta)$ est une droite d'équation $E = 0{,}7$ J. $E_{p_{max}} = E_1 = 0{,}70$ J, la courbe $E_p = f(\cos\theta)$ est alors prolongée jusqu'au point d'ordonnée 0,7 J ; d'autre part, $E_c = E_1 - E_p \Rightarrow E_c = 0{,}70 - m\|\vec{g}\|L + m\|\vec{g}\|L\cos\theta \Rightarrow E_c = 0{,}14 + m\|\vec{g}\|L\cos\theta$, d'où la courbe $E_c = f(\cos\theta)$ est une droite affine d'ordonnée à l'origine 0,14 J.

Fig-2



Lorsque l'écartement est maximal on a : $v = 0$ et par suite $E_c = 0$, donc d'après la courbe : $\cos\theta_m = -0{,}25 \Rightarrow \theta_m = 104{,}5°$.

On peut aussi calculer θ_m à partir de l'expression de E_c ; en effet :

$$E_c = 0{,}14 + m\|\vec{g}\|L\cos\theta_m = 0 \Rightarrow \cos\theta_m = -\frac{0{,}14}{m\|\vec{g}\|L} = -0{,}25 \Rightarrow \theta_m = 104{,}5°.$$

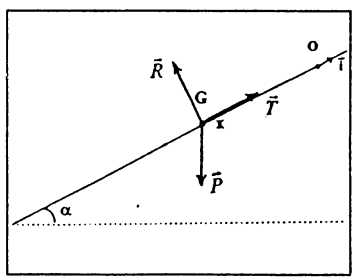
b) Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad, $\cos\theta = 0{,}5$; d'après le graphique on lit : $E_C = 0{,}42$ J.

NB : La valeur de E_c peut être déduite à partir de l'expression :

$E_c = 0{,}14 + m\|\vec{g}\|L\cos\theta$. Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad, $E_c = 0{,}42$ J.

Exercice n°7 :

1°)a) Appliquons le théorème de la variation de l'énergie cinétique au système (S) : { butée, projectile } entre l'instant de libération t_i et l'instant t_0 d'arrivée de la butée au point O :



$$\Delta E_c\}_{t_i}^{t_0} = W_{\vec{P}_t(I\to O)} + W_{\vec{T}(I\to O)} + W_{\vec{R}(I\to O)}$$

$$\frac{1}{2}m_t v_o^2 - 0 = -m_t\|\vec{g}\|a\sin\alpha + \frac{1}{2}ka^2 + 0$$

$$\Rightarrow v_o^2 = \frac{k}{m_t}a^2 - 2\|\vec{g}\|a\sin\alpha \text{ avec } m_t = m + m'.$$

$$E_{c(B)} = \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{k}{m_t}a^2 - 2\|\vec{g}\|a\sin\alpha\right).$$

AN: $E_{c(B)} \approx 3{,}25$ J.

b) $E = E_{c(B+P)} + E_{p_p(B+P+terre)} + E_{p_e(R)}$

$E_{c(B+P)} = \frac{1}{2}m_t v^2$; $E_{p_e(R)} = \frac{1}{2}kx^2$ et $E_{p_p(B+P+terre)} = m_t\|\vec{g}\|x\sin\alpha + E_{p_{po}}$

Déterminons $E_{p_{po}}$:

$E_{p_p} = 0$ pour $x = -L_o$, donc $0 = -m_t\|\vec{g}\|L_o\sin\alpha + E_{p_{po}} \Rightarrow E_{p_{po}} = m_t\|\vec{g}\|L_o\sin\alpha$;

d'où : $E_{p_p(B+P+terre)} = m_t\|\vec{g}\|(L_o + x)\sin\alpha$.

E s'écrit alors : $E = \frac{1}{2}m_t v^2 + m_t\|\vec{g}\|(L_o + x)\sin\alpha + \frac{1}{2}kx^2$.

Le système étant isolé, donc conservatif : $\dot{E} = C^{te}$, on pourra alors calculer E.

A l'instant de libération : $x = -a$ et $v_i = 0$, d'où : $E = m_t\|\vec{g}\|(L_o - a)\sin\alpha + \frac{1}{2}ka^2$.

AN: E = 10,4 J.

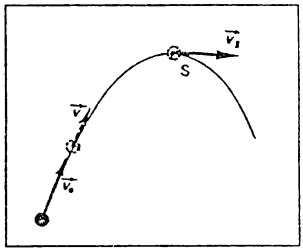
2°)a) Appliquons maintenant le théorème de la variation de l'énergie cinétique au projectile (B) seul, entre l'instant t_o de son passage par O et l'instant où il atteint sa hauteur maximale (passage par S).

$\Delta E_c\}_{t_o}^{t_S} = W_{\vec{P}(O\to S)} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_S^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = -m\|\vec{g}\|h_{max}$;

or $v_S = v_o \cos\alpha$; d'où :

$\frac{1}{2}mv_o^2(\cos^2\alpha - 1) = m\|\vec{g}\|h_{max}$

$E_{c_{(B)}}(\cos^2 - 1) = m\|\vec{g}\|h_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{E_{c_{(B)}}\sin^2\alpha}{m\|\vec{g}\|}$.



AN : $h_{max} = 4{,}875$ m.

b) Le théorème de la variation de l'énergie cinétique est de nouveau appliqué à (B) entre les dates t_o *et* t_I (date de son arrivée au sol en I).

$\Delta E_c\}_{t_o}^{t_I} = W_{\vec{P}(o\to I)} \Rightarrow E_{c_I} - E_{c_o} = m\|\vec{g}\|L_o \sin\alpha$; avec $E_{c_o} = E_{c_{(B)}}$ d'où :

$E_{c_I} = E_{c_o} + m\|\vec{g}\|L_o \sin\alpha$. ***AN*** : $E_{c_I} = 3{,}47$ J.

3°) La bille est en chute libre dans le champ de pesanteur, par conséquent, le système { bille + terre } est conservatif : E = C^{te}.

$E = E_I = E_{c_I}$ (car $E_{p_I} = 0$). $E = 3{,}47$ J.

L'énergie potentielle de pesanteur de ce système s'écrit :

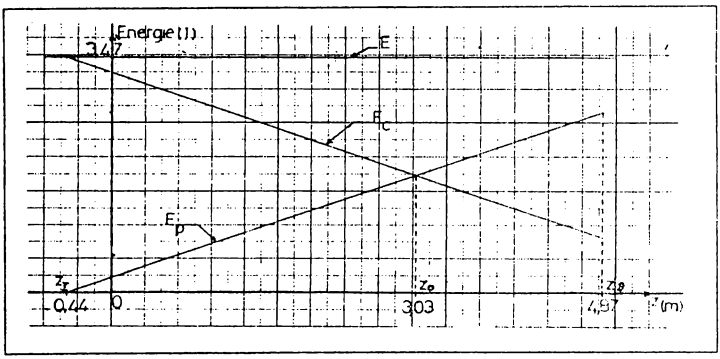
$E_{p_p}(z) = m\|\vec{g}\|z + m\|\vec{g}\|L_o \sin\alpha = 0{,}5z + 0{,}22$ en J.

L'énergie cinétique s'écrira alors :

$E_c(z) = E - E_{p_p}(z) = -0{,}5z + 3{,}25$ en J.

Représentation des énergies dans l'intervalle $[z_I, z_S]$,

avec $z_I = -L_o \sin\alpha = -0{,}44$ m.



4°)a) - Pour $z \in [0, z_S]$: phase de montée ; l'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle de pesanteur. En effet d'après les diagrammes E_c décroît et E_{p_p} croît.

Pour $z \in [z_1, z_S]$: phase de descente ; l'énergie potentielle de pesanteur se transforme en énergie cinétique.

b) D'après le diagramme d'énergie, on a :

$E_{p_p} = E_c$ pour $z_o = 3{,}03\,m$; d'où: $h_o = z + L_o \sin\alpha \approx 3{,}47\,m$.

Exercice n°8 :

PARTIE A/

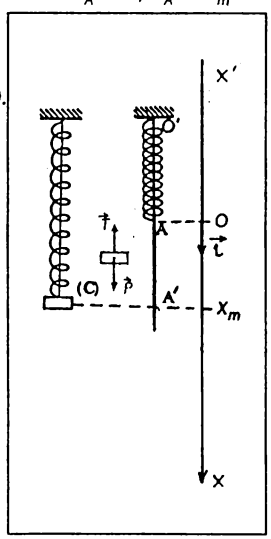
1°) Appliquons le théorème de la variation de l'énergie cinétique au solide (C) entre les instants t_A de libération de (C) et $t_{A'}$ instant où le ressort atteint son allongement maximal.

$$\Delta E_c \Big]_{t_A}^{t_{A'}} = W_{\vec{P}(A\to A')} + W_{\vec{T}(A\to A')} \text{ ; or } v_{A'} = v_A = 0 \text{ et } x_A = 0 ; x_{A'} = x_m$$

$$\frac{1}{2}mv_{A'}^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = m\|\vec{g}\|(x_{A'} - x_A) + \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_{A'}^2)$$

d'où $0 = m\|\vec{g}\|x_m - \frac{1}{2}k x_m^2 \Rightarrow x_m\left(m\|\vec{g}\| - \frac{1}{2}k x_m\right) = 0.$

Or $x_m \neq 0$; d'où: $x_m = \dfrac{2m\|\vec{g}\|}{k}$.



AN: $x_m = 4.10^{-2}$ m.

2°) Les forces agissant sur (C) sont : $\vec{P}$ et $\vec{T}$; on a:

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{T}$.

Projection sur (x'x) : $\sum F_{ext} = m\|\vec{g}\| - k x_m$

Remplaçons x_m par sa valeur, on obtient :

$m\|\vec{g}\| - 2m\|\vec{g}\| = -m\|\vec{g}\| \neq 0$.

(C) n'est donc pas en état d'équilibre.

3°)a) $E_p = E_{p_p(C+terre)} + E_{p_e(R)} = -m\|\vec{g}\|x + \frac{1}{2}kx^2$

b) E_p est minimale $\Rightarrow \dfrac{dE_p}{dx} = 0$, or $\dfrac{dE_p}{dx} = -m\|\vec{g}\| + kx$

Soit x_o l'abscisse correspondant à cette position :

$-m\|\vec{g}\| + k x_o = 0 \Rightarrow x_o = \dfrac{m\|\vec{g}\|}{k}$. ***AN***: $x_o = 2.10^{-2}$ m.

A l'équilibre : $\vec{P} + \vec{T}_o = \vec{0}$.

Projection sur (x'x) : $m\|\vec{g}\| - k x_o = 0$ on retrouve alors l'expression de x_o.

La position d'équilibre stable correspond à une énergie potentielle minimale.

c) On vient de montrer que l'énergie potentielle est minimale à la position d'équilibre, donc l'énergie cinétique est maximale, puisque le système est conservatif (E = constante) : $E_c = E - E_p \Rightarrow E_{c_{max}} = E - E_{p_{min}}$

Or à l'instant de libération $E = 0$; d'où: $E_{c_{max}} = -E_{p_{min}} = -E_p(x = x_o)$

donc: $\frac{1}{2}mv_{max}^2 = -(-m\|\vec{g}\|x_o + \frac{1}{2}kx_o^2) = m\|\vec{g}\|x_o - \frac{1}{2}kx_o^2$

$\Rightarrow \|\vec{v}_{max}\| = \sqrt{\left(2\|\vec{g}\| - \frac{k}{m}x_o\right)x_o}$.

Remarque : On pourra simplifier l'expression de $\|\vec{v}_{max}\|$ en utilisant la condition d'équilibre de (C) :

$m\|\vec{g}\| - kx_o = 0$; $\frac{1}{2}mv_{max}^2 = m\|\vec{g}\|x_o - kx_o^2 - \frac{1}{2}kx_o^2 + kx_o^2$

$= x_o(m\|\vec{g}\| - kx_o) + \frac{1}{2}kx_o^2 = \frac{1}{2}kx_o^2$.

d'où $\|\vec{v}_{max}\| = x_o\sqrt{\frac{k}{m}}$. ***AN***: $\|\vec{v}_{max}\| = 0{,}45\,m.s^{-1}$.

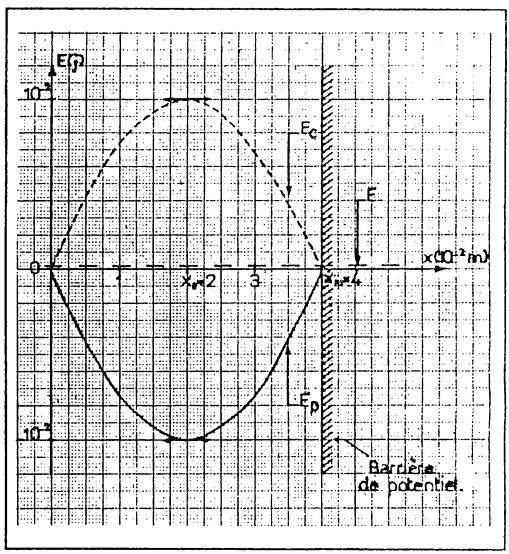
4°)a) On a montré que E est une constante nulle ; la courbe $E(x)$ est la droite confondue avec l'axe des abscisses x.

$E_p(x) = -m\|\vec{g}\|x + \frac{1}{2}kx^2$, du type:

$E_p(x) = ax^2 + bx = 25x^2 - x$

La courbe $E_p(x)$ est une branche de parabole, son minimum correspond à :

$\begin{cases} x = x_o = 2.10^{-2}m \\ E_{p_{min}} = E_p(x_o) = -10^{-2}J \end{cases}$



b) $E_c = E - E_p$ (voir courbe $E_c(x)$)

$v = 0 \Rightarrow E = 0$.

D'après le graphe :

$E_c = 0$ correspond à $x = 0m$

et $x = 4.10^{-2}$ m.

PARTIE B/

1°) Appliquons le théorème de la variation de l'énergie cinétique au système formé par la bille (B) entre les dates t_1 (de lancement de (B))

et t_2 (juste avant le choc) :

$$\Delta E_c\}_{t_1}^{t_2} = W_{\vec{P}_B(1\to 2)}$$

$\frac{1}{2}m_B v_B^2 - \frac{1}{2}m_B v_o^2 = -m_B\|\vec{g}\|h$, soit: $\|\vec{v}_B\| = \sqrt{v_o^2 - 2\|\vec{g}\|h}$

AN: $\|\vec{v}_B\| = 2\,m.s^{-1}$.

2°) Le choc est élastique il y a donc :

* Conservation de la quantité de mouvement du système {B,C} :

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_B \vec{v}_B = m_B \vec{v}'_B + m\vec{v}'_C \quad (1)$$

* Conservation de l'énergie cinétique :

$$E_{c_i} = E_{c_f} \Rightarrow \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_B v_B'^2 + \frac{1}{2} m v_C'^2 \quad (2)$$

Les vecteurs vitesses sont colinéaires :

$$(1) \Rightarrow m_B (v_B - v'_B) = m v'_C \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow m_B (v_B^2 - v_B'^2) = m v_C'^2 \quad (4)$$

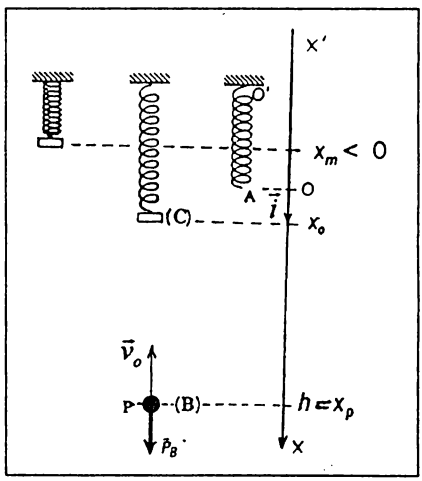
$$\frac{(4)}{(3)} = \frac{(v_B - v'_B)(v_B + v'_B)}{(v_B - v'_B)} = v'_C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_B + v'_B = v'_C \quad (5) \\ \text{et} \\ v_B - v'_B = \frac{m}{m_B} v'_C \quad (3) \end{cases}$$

La résolution de ce système des deux équations donne :

$$v'_C = \frac{2m_B}{m_B + m} v_B \ . \quad \underline{\textbf{AN}} : \ v'_C = 1{,}5\,\text{m.s}^{-1} .$$

$$v'_B = v'_C - v_B \quad \underline{\textbf{AN}} : \ v'_B = -0{,}5\,\text{m.s}^{-1} .$$



3°) Soient les instants :

* t_i : date de l'instant juste après le choc.
* t_f : date de l'instant correspondant à la compression maximale. On notera x_m : l'abscisse de (C) à cet instant

Appliquons le théorème de la variation de l'énergie cinétique au solide (C) entre ces deux instants :

$$\Delta E_c \}_{t_i}^{t_f} = W_{\vec{P}_C (i \to f)} + W_{\vec{T} (i \to f)} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m v_C'^2 = m \|\vec{g}\| (x_m - x_o) + \frac{1}{2} k (x_o^2 - x_m^2) ;$$

soit, en tenant compte de la condition d'équilibre : $m\|\vec{g}\| = k x_o$;

$k x_m^2 - 2m\|\vec{g}\| x_m + k x_o^2 - m v_C'^2 = 0$; ou numériquement : $50 x_m^2 - 2 x_m - 0{,}205 = 0$.

La résolution de cette équation du second degré donne deux solutions :

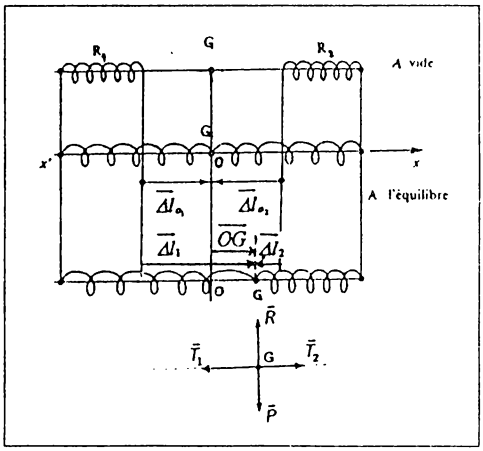
$x_{m_1} = -4{,}70\,\text{cm}$ *et* $x_{m_2} = 8{,}70\,\text{cm}$.

Une compression correspond à $x_m < 0$. La solution à retenir est alors $x_{m_1} = -4{,}70\,\text{cm}$ et la compression maximale est $|x_{m_1}| = 4{,}70\,\text{cm}$.

Remarque : x_{m_2} correspond à l'allongement maximal, en effet le solide effectue un mouvement périodique entre les positions extrêmes d'abscisses x_{m_1} et x_{m_2}.

Exercice n°1 :

1°)



Le système (S) :{ A }.

Bilan des forces extérieures appliquées à (S) : $\vec{P}, \vec{R}, \vec{T}_1, \vec{T}_2$

La R. F. D appliquée à (S) :

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = M\vec{a}$; avec $\vec{T}_1 = -k\,\overrightarrow{\Delta l_1}$ et $\vec{T}_2 = -k\,\overrightarrow{\Delta l_2}$.

Projection sur (x'x) : $T_1 + T_2 = Ma_x \Leftrightarrow -k\Delta l_1 - k\Delta l_2 = Ma_x$ (1)

Exprimons Δl_1 et Δl_2 : $\overrightarrow{\Delta l_1} = \overrightarrow{\Delta l_{o_1}} + \overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{\Delta l_2} = \overrightarrow{\Delta l_{o_2}} + \overrightarrow{OG}$

$\Delta l_1 = l - l_o + x$ et $\Delta l_2 = -(l - l_o) + x$

(1) devient : $-k(l - l_o + x) - k\left(x - (l - l_o)\right) = M\dfrac{d^2x}{dt^2}$; soit :

$-2kx = M\dfrac{d^2x}{dt^2}$; d'où : $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$

Posons $\omega_o^2 = \dfrac{2k}{M}$, on obtient : $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$: C'est l'équation différentielle d'un mouvement rectiligne sinusoïdal, donc le mouvement de G est rectiligne sinusoïdal.

2°) D'après la courbe $x = f(t)$, on a : $T_o = 2 \times \dfrac{\pi}{20} = \dfrac{\pi}{10}$ s, soit : $T_o \approx 0{,}314$ s.

D'autre part : $T_o = \dfrac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{2k}}$, d'où : $k = \dfrac{4\pi^2 M}{2T_o^2}$. $\underline{AN}$: $k = 20\,\text{N.m}^{-1}$.

3°) La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$x(t) = X_m \sin(\omega_o t + \varphi)$, avec $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T_o} = 20\,\text{rad.s}^{-1}$.

D'après la courbe $x = f(t)$, on a : $X_m = 10^{-2}$ m ; d'autre part :

$x(t=0)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10^{-2}$ m et $v(t=0)=\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{t=0}<0$ (courbe décroissante).

D'où : $\begin{cases} x(t=0)=X_m \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10^{-2} \text{ m} & (1) \\ v(t=0)=X_m\omega_0\cos\varphi<0 \Rightarrow \cos\varphi<0 & (2) \end{cases}$

La résolution de ce système conduit à : $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ rad.

L'équation numérique de $x(t)$ s'écrit alors sous la forme :

$$x(t)=10^{-2}\sin(20t+\frac{2\pi}{3}) \text{ en m, } t \text{ en s.}$$

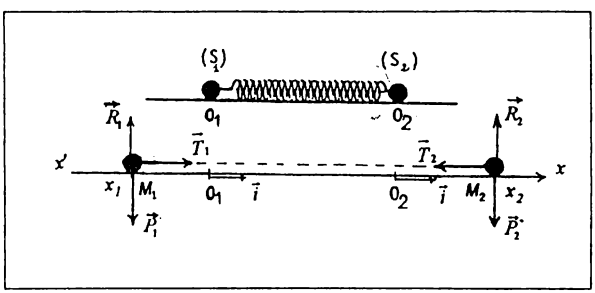
4°) $x(t)=X_m\sin(\omega_0 t+\varphi)$; $\frac{v(t)}{\omega_0}=X_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$.

Elevons au carré ces deux équations, il vient : $x^2(t)+\frac{v^2(t)}{\omega_0^2}=X_m^2$, vrai quelque soit t. En particulier à t = 0, on a : $x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega_0^2}=X_m^2 \Rightarrow v_0=\pm\omega_0\sqrt{X_m^2-x_0^2}$.

Or à t = 0, v_0 est négative, d'où : $v_0=-\omega_0\sqrt{X_m^2-x_0^2}$. ***AN***: $v_0=-0{,}1$ m.s^{-1}.

Exercice n°2 :

1°)



Système (S) : { S_1, S_2, R }.

Bilan des forces extérieures : $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{R}_1, \vec{R}_2$.

Calculons la somme des forces extérieures appliquées à (S) :

$\sum\vec{F}_{ext}=\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{R}_1+\vec{R}_2=\vec{0}$.

(S) est pseudo-isolé, d'où son vecteur quantité de mouvement $\vec{p}_S$ est constant. Exprimons $\vec{p}_S$ à un instant de date t quelconque : $\vec{p}_S=\vec{p}_{S_1}+\vec{p}_{S_2}$.

A t = 0 , la quantité de mouvement de (S) est :

$\vec{p}_o = \vec{0}$; on a : $\vec{p}_o = \vec{p}_S \Rightarrow \vec{0} = \vec{p}_{S_1} + \vec{p}_{S_2} \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{0}$

Projetons sur $(x'x)$: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$, d'où : $\frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_1}{m_2}$.

2°) $E = E_{c(S_1)} + E_{c(S_2)} + E_{p_e(R)}$

$E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$ (1) or $\overrightarrow{\Delta l} = \overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{O_1O_2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{\Delta l} = \overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M_2} - \overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{O_2M_2}$; en projetant sur $(x'x)$, on aura : $\Delta l = -x_1 + x_2$; donc : $E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$.

D'autre part ; $\frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_1}{m_2} = -2$ et $\frac{v_1}{v_2} = \frac{x_1}{x_2} = -2$,

soit : $v_2 = -\frac{1}{2}v_1$ et $x_2 = -\frac{1}{2}x_1$.

D'où : $E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}2m_1(-\frac{1}{2}v_1)^2 + \frac{1}{2}k(-x_1 - \frac{1}{2}x_1)^2$, soit enfin :

$E = \frac{3}{4}m_1 v_1^2 + \frac{9}{8}k x_1^2$ (2).

3°)a) Le système est pseudo-isolé, de plus il n'existe pas de forces intérieures dissipatives : le système est alors conservatif et par suite E est constante, on a :

$E = E_o$, avec E_o : l'énergie mécanique du système à la date $t = 0$.

D'autre part : à $t = 0$, on a : $v_1 = v_2 = 0$ et $\Delta l = l - l_o = 10$ cm.

D'après (1), $E_o = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$. ***AN*** : $E = E_o = 5.10^{-2}$ J.

b) E est constante $\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$. Dérivons membre à membre l'équation (2), on obtient : $\frac{dE}{dt} = \left(\frac{3}{2}m_1\frac{dv_1}{dt} + \frac{9}{4}k x_1\right)v_1 = 0$; $v \neq 0$ à t quelconque, d'où : $\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{3k}{2m_1}x_1 = 0$: c'est l'équation différentielle d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.

c) L'équation horaire $x_1(t) = X_{1m}\sin(\omega_{o_1}t + \varphi_1)$ est la solution générale de l'équation différentielle , avec $\omega_{o_1} = \sqrt{\frac{3k}{2m_1}} = 17{,}32\,\text{rad.s}^{-1}$.

A $t = 0$: $\begin{cases} x_1(t=0) = X_{1m}\sin\varphi_1 = x_{o_1} < 0 \\ v_1(t=0) = X_{1m}\,\omega_{o_1}\cos\varphi_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}\,\text{rad} \\ X_{1m} = -x_{o_1} \end{cases}$

Déterminons x_{o_1} ; on a : $\frac{x_{o_1}}{x_{o_2}} = -2$ et $l - l_o = -x_{o_1} + x_{o_2}$,

d'où : $x_{o_1} = -\frac{20}{3} = -6{,}66$ cm et par suite, $X_{1m} = 6{,}66$ cm.

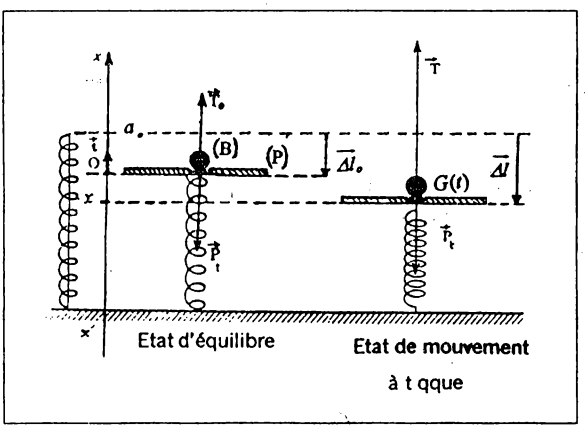
L'équation horaire s'écrit alors: $x_1(t) = 6{,}66.10^{-2}\, sin(17{,}32t - \frac{\pi}{2})$ en m, t en s.

D'autre part, on a à chaque instant : $x_2 = -\frac{1}{2}x_1$, d'où :

$x_2(t) = -3{,}33.10^{-2}\, sin(17{,}32t - \frac{\pi}{2}) = 3{,}33.10^{-2}\, sin(17{,}32t + \frac{\pi}{2})$ en m, t en s.

S_1 et S_2 vibrent toujours en opposition de phase.

Exercice n°3 :



1°) A l'équilibre : $\vec{P}_t + \vec{T}_o = \vec{0} \Rightarrow \left\|\vec{P}_t\right\| = \left\|\vec{T}_o\right\|$ avec $\vec{P}_t = (M+m)\vec{g}$; donc:

$(M+m)\left\|\vec{g}\right\| = k\,a_o$, d'où: $a_o = \frac{(M+m)\left\|\vec{g}\right\|}{k}$. ***AN***: $a_o = 0{,}1$ m.

2°)a) Appliquons la R. F. D au système (S): { plateau, bille } ;

$\vec{P}_t + \vec{T} = (M+m)\vec{a}$.

Projection sur $(x'x)$: $-(M+m)\left\|\vec{g}\right\| - k\,\Delta l = (M+m)\,a_x$

$\overrightarrow{\Delta l} = \overrightarrow{\Delta l_o} + \overrightarrow{OG} \Rightarrow \Delta l = -a_o + x$, d'où :

$-(M+m)\left\|\vec{g}\right\| + k\,a_o - k\,x = (M+m)\frac{d^2x}{dt^2}$ et, en tenant compte de la condition d'équilibre il vient: $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{M+m}x(t) = 0$; c'est l'équation différentielle d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$ et de période

$T_o = \dfrac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$. ***AN*** : $\omega_o = 10$ rad.s^{-1} et $T_o = 0{,}628$ s.

b) La solution générale de l'équation différentielle se met sous la forme :

$$x(t) = X_m \sin(\omega_o t + \varphi)$$

A $t = 0$, on a : $\begin{cases} x(t=0) = X_m \sin\varphi = x_o = -15\text{ cm} < 0 \\ v(t=0) = X_m \omega_o \cos\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi < 0 \\ \cos\varphi = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = -\dfrac{\pi}{2}\text{ rad} \\ X_m = -x_o = 15\text{ cm} \end{cases}$; d'où : $x(t) = 0{,}15\sin(10t - \dfrac{\pi}{2})$ en m, t en s.

L'accélération $a(t)$ s'exprime sous la forme : $a(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega_o^2\, x(t)$ d'après l'équation différentielle.

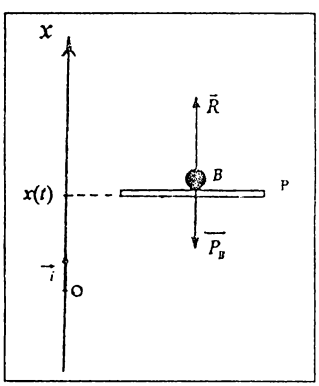
3°) Système :{ bille }.

Bilan des forces extérieures : $\vec{P}_B$ et $\vec{R}$: réaction du plateau sur la bille.

Appliquons la R. F. D à la bille : $\vec{P}_B + \vec{R} = m\,\vec{a}_B$

Projection sur $(x'x)$: $-m\|\vec{g}\| + \|\vec{R}\| = m a_B$, or $a_B = a_P = a = -\omega_o^2\, x$.

D'où : $\|\vec{R}\| = m\left(a + \|\vec{g}\|\right) = m\left(-\omega_o^2 x + \|\vec{g}\|\right)$.



On remarque que l'intensité de $\vec{R}$ est une fonction de l'abscisse x de la bille.

Tant que la bille est en contact avec le plateau : $\|\vec{R}\| > 0$.

La bille quittera le plateau lorsque : $\|\vec{R}\| = 0$.

Soit x_1 la position correspondante, on a alors :

$\|\vec{R}\| = m\left(\|\vec{g}\| - \omega_o^2 x_1\right) = 0$; $m \neq 0$, donc $x_1 = \dfrac{\|\vec{g}\|}{\omega_o^2}$.

AN : $x_1 = 0{,}1$ m.

Appliquons la R . F. D au système { plateau } soumis aux forces ext. : $\vec{P}_P$ et $\vec{T}$

On a : $\vec{P}_P + \vec{T} = M\,\vec{a}$. Projetons sur $(x'x)$:

$-M\|\vec{g}\| + T = Ma \Rightarrow T = M\left(a + \|\vec{g}\|\right) \Rightarrow T = M\left(-\omega_o^2 x_1 + \|\vec{g}\|\right)$

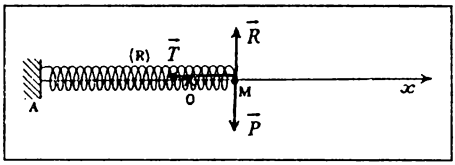
$\Rightarrow T = M\left(-\omega_o^2 \dfrac{\|\vec{g}\|}{\omega_o^2} + \|\vec{g}\|\right) = 0$. $T = 0$, donc : au point d'abscisse x_1, le ressort n'est pas déformé.

Exercice n°4 :

1°)a)Appliquons la R. F. D au point matériel (M) : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=m\vec{a}$.

Projection sur (x'x) :

$$T=ma_x \Rightarrow -k\,x(t)=m\frac{d^2x(t)}{dt^2};\ \text{d'où :}\quad \frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{k}{m}x(t)=0.$$



Le mouvement de (M) est rectiligne sinusoïdal de pulsation $\omega_o=\sqrt{\frac{k}{m}}$ de valeur $\omega_o = 100\,\text{rad.s}^{-1}$.

La période du mouvement est donc : $T_o=\frac{2\pi}{\omega_o}=\frac{2\pi}{100}$, soit $T_o = 6{,}28.10^{-2}$ s.

b) L'équation horaire de (M) est la solution générale de l'équation différentielle. Elle se met sous la forme : $x(t)=X_m\,sin(\omega_o t+\varphi)$.

A t = 0, on a : $\begin{cases}x(t=0)=-a=X_m\,sin\varphi\\ v(t=0)=0=X_m\,\omega_o\cos\varphi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varphi=-\frac{\pi}{2}\,\text{rad.}\\ X_m=a=4\,\text{cm.}\end{cases}$

D'où : $x(t)=4.10^{-2}\,sin(100t-\frac{\pi}{2})$ en m, t en s.

2°)a) Bilan des forces appliquées au point matériel (M) : $\vec{P},\vec{R}$, et $\vec{T}$.

Choisissons comme dates :

* $t_o = 0$: date de libération de (M) en N_o ($x_o=-a$ et $v_o=0$)

* $t > 0$: date ultérieure quelconque pour laquelle (M) est en N ($x(t)$ et $v(t)$).

Le théorème de la variation de l'énergie cinétique appliqué à (M) s'écrit :

$$\Delta E_c\}_{t_o}^{t}=\sum W_{\vec{F}_{appliquées}}\}_{t_o}^{t}$$

$$\frac{1}{2}mv^2-0=W_{\vec{P}}\}_{t_o}^{t}+W_{\vec{R}}\}_{t_o}^{t}+W_{\vec{T}}\}_{t_o}^{t}=W_{\vec{T}}\}_{t_o}^{t}$$

$W_{\vec{P}}=W_{\vec{R}}=0$, car $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont perpendiculaires au déplacement.

$W_{\vec{T}}\}_{t_o}^{t}=W_{\vec{T}(N_o\to N)}=\frac{1}{2}k\,x_o^2-\frac{1}{2}k\,x^2$, d'où :

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k\,a^2-\frac{1}{2}k\,x^2.$$

Dérivons membre à membre la relation précédente, par rapport à t, on obtient : $mv(t)\frac{dv(t)}{dt}=-k\,x(t)\frac{dx(t)}{dt}$, or $v(t)\neq 0$, d'où : $\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{k}{m}x(t)=0$.

On retrouve alors l'équation différentielle du mouvement de (M).

b) $W_{\vec{T}(N_o\to N_1)}=\frac{1}{2}k(x_o^2-x_1^2)$ ***AN***: $W_{\vec{T}(N_o\to N_1)}=9.10^{-3}$ J.

En prenant comme date t_1 : la date de passage de (M) par N_1, le théorème de la variation de l'énergie cinétique s'écrira :

$\Delta E_c\}_{t_o}^{t_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = W_{\vec{T}(N_o \to N_1)} \Rightarrow \|\vec{v}_1\| = \sqrt{\frac{2W_{\vec{T}}}{m}}$. **AN** : $\|\vec{v}_1\| = 3{,}46$ m.s^{-1}.

3°)a) Cherchons d'abord l'équation horaire de (M') : $x'(t) = X'_m \sin(\omega_o t + \varphi')$

A $t = 0$, on a : $\begin{cases} x'(t=0) = a' = X'_m \sin\varphi' \\ v'(t=0) = 0 = X'_m \omega_o \cos\varphi' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi' = +\frac{\pi}{2} \text{ rad} \\ X'_m = a' \end{cases}$

D'où : $x'(t) = 3.10^{-2} \sin(100t + \frac{\pi}{2})$ en m, t en s.

Soit P le point de rencontre de (M) et (M') et t_P la date correspondante, on a:

$\overrightarrow{\Omega P} = \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{\Omega O'} + \overrightarrow{O'P}$

Projetons sur (x'x): $\overline{\Omega P} = \overline{\Omega O} + x_P(t_P) = \overline{\Omega O'} + x'_P(t_P)$, or $\overline{\Omega O} = -\overline{\Omega O'}$,

d'où $x'_P(t_P) = 2\overline{\Omega O} + x_P(t_P)$; soit :

$3.10^{-2} \sin(100t_P + \frac{\pi}{2}) = 4.10^{-2} + 4.10^{-2} \sin(100t_P - \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow 3\sin(100t_P + \frac{\pi}{2}) = 4\left(1 - \sin(100t_P + \frac{\pi}{2})\right) \Rightarrow -3\cos(100t_P) = 4(1 + \cos(100t_P))$

$\Rightarrow \cos(100t_P) = -\frac{4}{7}$, d'où : $100t_P = 2{,}18 + 2k\pi$.

La première rencontre a lieu pour $k = 0$, soit $t_P = 2{,}18.10^{-2}$ s.

Remplaçons t_P dans $\overline{\Omega P}$:

$\overline{\Omega P} = -2.10^{-2} + 4.10^{-2} \sin(100t_P - \frac{\pi}{2})$, d'où : $\overline{\Omega P} = 0{,}288.10^{-2}$ m.

b) $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = X_m \omega_o \cos(100t - \frac{\pi}{2}) = X_m \omega_o \sin(100t)$

$v'(t) = \frac{dx'(t)}{dt} = X'_m \omega_o \cos(100t + \frac{\pi}{2}) = -X'_m \omega_o \sin(100t)$

* Juste avant le choc , on a : $\begin{cases} v(t_P) = v_1 = 3{,}28 \text{ m.s}^{-1} \\ v'(t_P) = v'_1 = -2{,}46 \text{ m.s}^{-1} \end{cases}$

* Juste après le choc, (M) aura une vitesse notée $\vec{v}_2$ et (M') aura une vitesse notée $\vec{v}'_2$.

Le choc est élastique, il y a donc conservation du vecteur quantité de mouvement et de l'énergie cinétique de l'ensemble (M, M') :

$\begin{cases} \vec{p}_i = \vec{p}_f \\ E_{c_i} = E_{c_f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\vec{v}_1 + m'\vec{v}'_1 = m\vec{v}_2 + m'\vec{v}'_2 & (1) \\ \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m'v_1'^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}m'v_2'^2 & (2) \end{cases}$

En tenant compte du fait que $m = m'$ et après projection de (1) sur (Ax), il vient : $\begin{cases} v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \\ v_1^2 + v_1'^2 = v_2^2 + v_2'^2 \end{cases}$

La résolution de ce système d'équation conduit à : $\begin{cases} v_2' = v_1 = 3{,}28\ \text{m.s}^{-1} \\ v_1' = v_2 = -2{,}46\ \text{m.s}^{-1} \end{cases}$

c) $x(t) = X_m \sin(\omega_o t + \varphi)$; $v(t) = X_m \omega_o \cos(\omega_o t + \varphi)$

$x'(t) = X'_m \sin(\omega_o t + \varphi')$; $v'(t) = X'_m \omega_o \cos(\omega_o t + \varphi')$

A t = 0, on a : $\begin{cases} x(t=0) = x_o = x_P = \overline{OP} = \overline{O\Omega} + \overline{\Omega P} = 2{,}286\ \text{cm} \\ v(t=0) = v_o = v_2 = -2{,}46\ \text{m.s}^{-1} \end{cases}$

et $\begin{cases} x'(t=0) = x'_o = x'_P = \overline{O'P} = \overline{O'\Omega} + \overline{\Omega P} = -1{,}714\ \text{cm} \\ v'(t=0) = v'_o = v'_2 = 3{,}28\ \text{m.s}^{-1} \end{cases}$

Soient : $\begin{cases} X_m \sin\varphi = x_o \\ X_m \omega_o \cos\varphi = v_o \end{cases}$ et $\begin{cases} X'_m \sin\varphi' = x'_o \\ X'_m \omega_o \cos\varphi' = v'_o \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} X_m = \sqrt{x_o^2 + \left(\dfrac{v_o}{\omega_o}\right)^2} \\ \text{tg}\varphi = \dfrac{x_o \omega_o}{v_o} \end{cases}$ et $\begin{cases} X'_m = \sqrt{x_o'^2 + \left(\dfrac{v'_o}{\omega_o}\right)^2} \\ \text{tg}\varphi' = \dfrac{x'_o \omega_o}{v'_o} \end{cases}$

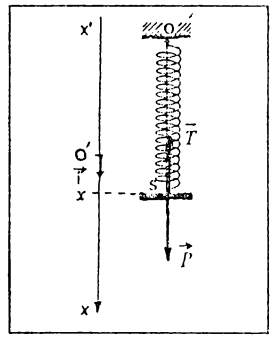
AN : $X_m = 3{,}36.10^{-2}$ m et $X'_m = 3{,}70.10^{-2}$ m.

$\text{tg}\varphi = -0{,}929 \Rightarrow \varphi = -0{,}75$ rad ou $\varphi = 2{,}39$ rad ;
comme $\cos\varphi < 0$ et $\sin\varphi < 0 \Rightarrow \varphi = 2{,}39$ rad.

$\text{tg}\varphi' = -0{,}522 \Rightarrow \varphi' = -0{,}48$ rad ou $\varphi' = 2{,}66$ rad ;
comme $\cos\varphi' > 0$ et $\sin\varphi' < 0 \Rightarrow \varphi' = -0{,}48$ rad.

Les équations horaires de (M) et (M') s'écrivent alors :
$x(t) = 3{,}36.10^{-2} \sin(100t + 2{,}39)$ en m, t en s.
$x'(t) = 3{,}70.10^{-2} \sin(100t - 0{,}48)$ en m, t en s.

Exercice n°5 :



1°)a) Système : { solide (S) }.
La R. F. D appliquée à (S) soumis aux forces extérieures $\vec{P}$ et $\vec{T}$: $\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$

Projetons sur (x'x) :

$m\|\vec{g}\|+T=ma_x \Rightarrow m\|\vec{g}\|-k\Delta l=ma_x$; or $\Delta l=x_o+x$,

d'où : $m\|\vec{g}\|-kx_o-kx=ma_x$.

A l'équilibre de (S) on a : $m\|\vec{g}\|-kx_o=0$,

d'où : $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$:

C'est l'équation différentielle d'un mouvement rectiligne sinusoïdal. Les oscillations de (S) sont donc sinusoïdales.

b) La pulsation des oscillations est : $\omega_o=\sqrt{\frac{k}{m}}$ et la période propre de l'oscillateur est : $T_o=\frac{2\pi}{\omega_o}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

D'après la condition d'équilibre : $\frac{m}{k}=\frac{x_o}{\|\vec{g}\|}$; d'où :

$T_o=2\pi\sqrt{\frac{x_o}{\|\vec{g}\|}}$. ***AN*** : $T_o=1{,}088$ s.

2°)a)(S') étant en mouvement de chute libre sans vitesse initiale, il s'agit donc d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré vérifiant :

$v_f^2-v_i^2=2a(x_f-x_i) \Rightarrow v_o^2-0=2\|\vec{g}\|L$. Avec $L=2x_o$; il vient :

$\|\vec{v}_o\|=2\sqrt{\|\vec{g}\|x_o}$. ***AN*** : $\|\vec{v}_o\|=3{,}46$ m.s^{-1}.

b) Le choc est mou , la conservation de la quantité de mouvement du système { S, S' } s'écrit : $\vec{p}_{\text{juste avant le choc}}=\vec{p}_{\text{juste après le choc}}$

$$m'\vec{v}_o=(m+m')\vec{v}'$$

$\Rightarrow \|\vec{v}'\|=\left(\frac{m'}{m+m'}\right)\|\vec{v}_o\|$; soit : $\|\vec{v}'\|=\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\|\vec{v}_o\|$. ***AN*** : $\|\vec{v}'\|=0{,}865$ m.s^{-1}.

c) Appliquons le théorème de la variation de l'énergie cinétique au système { S, S' } entre les instants de dates :

t_1 : date juste après le choc ($x_1=x_o$; $v_1=v'$).

t_2 : date pour laquelle { S, S' } atteint l'une de ses positions extrêmes (x_2 ; $v_2=0$).

$$\Delta E_c\Big]_{t_1}^{t_2} = W_{\vec{P}_t(1\to 2)} + W_{\vec{T}(1\to 2)}$$

$$0 - \frac{1}{2}(m+m')v'^2 = (m+m')\|\vec{g}\|x_2 + \frac{1}{2}k x_o^2 - \frac{1}{2}k(x_o + x_2)^2$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}(m+m')v'^2 = (m+m')\|\vec{g}\|x_2 + \frac{1}{2}k x_o^2 - \frac{1}{2}k x_o^2 - \frac{1}{2}k x_2^2 - k x_2 x_o$$

$$= \underbrace{\left(m\|\vec{g}\| - k x_o\right)}_{0} x_2 + m'\|\vec{g}\|x_2 - \frac{1}{2}k x_2^2,$$

$$\Rightarrow \quad k x_2^2 - 2m'\|\vec{g}\|x_2 - (m+m')v'^2 = 0, \quad \text{ou encore:}$$

$$x_2^2 - 2\frac{m'}{k}\|\vec{g}\|x_2 - \left(\frac{m+m'}{k}\right)v'^2 = 0.$$

En tenant compte des relations : $\frac{m}{k} = \frac{x_o}{\|\vec{g}\|}$ *et* $m' = \alpha m$, il vient :

$$x_2^2 + 2\alpha x_o x_2 - \left(\frac{1+\alpha}{\|\vec{g}\|}\right)x_o v'^2 = 0, \quad \text{soit numériquement :} \quad x_2^2 - 0{,}2x_2 - 0{,}03 = 0$$

La résolution de cette équation du second degré donne : $\begin{cases} x_2 = -0{,}1\,\text{m} \\ x_2' = 0{,}3\,\text{m} \end{cases}$

L'ensemble (S, S') oscille entre les positions d'abscisses x_2 *et* x_2'.

L'amplitude de ces oscillations est alors : $X_m = \frac{|x_2 - x_2'|}{2} = 0{,}2\,\text{m}$.

NB : On peut retrouver l'amplitude X_m à partir de la relation :

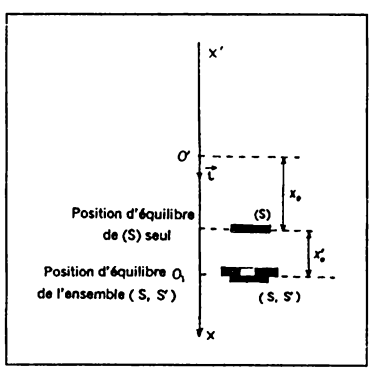
$$X_m^2 = x^2(t) + \frac{v^2(t)}{\omega_o'^2} \qquad (1)$$

avec $\omega_o'^2 = \frac{k}{m+m'} = \frac{\|\vec{g}\|}{(1+\alpha)x_o}$

$x(t)$ représente l'élongation de l'ensemble (S, S') par rapport à la position d'équilibre O_1 de l'ensemble, qui doit être choisi comme origine des espaces.

A l'instant juste après le choc :

$x = -x_o'$ et $v = v'$; avec



$x_o' = \frac{m'\|\vec{g}\|}{k} = \alpha x_o = 0{,}1\,\text{m}$. En remplaçant dans (1) on retrouve la valeur de X_m.

Remarque : Avec la nouvelle origine O_1, les positions extrêmes de l'ensemble (S, S') trouvées précédemment sont : $X_2' = x_2' - x_o' = 0{,}2\,\text{m}$

$$X_2 = x_2 - x_o' = -0{,}2\,\text{m}.$$

On constate que les positions extrêmes du nouvel oscillateur sont symétriques par rapport à la position d'équilibre de l'ensemble (S, S').
Ainsi un oscillateur libre non amorti oscille toujours symétriquement par rapport à sa position d'équilibre stable.

d) L'équation horaire du mouvement est de la forme: $x(t) = X_m \sin(\omega'_o t + \varphi)$

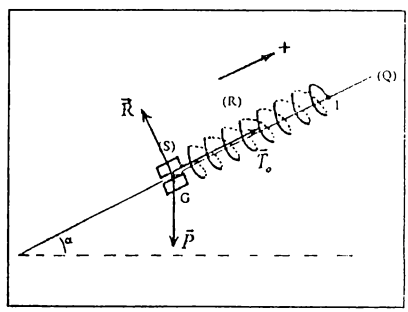
A t = 0, on a : $\begin{cases} x(t=0) = -x'_o = X_m \sin\varphi \\ v(t=0) = v' = X_m \omega'_o \cos\varphi > 0 \end{cases}$

$\sin\varphi = -\dfrac{x'_o}{X_m} = -\dfrac{1}{2}$ et $\cos\varphi > 0$; donc: $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$ rad

$\omega'_o = \sqrt{\dfrac{\|\vec{g}\|}{x_o(1+\alpha)}} = 5\,\text{rad.s}^{-1}$; d'où: $x(t) = 0{,}2\sin(5t - \dfrac{\pi}{6})$ en m, t en s.

Exercice n°6 :

PARTIE A /



1°) Condition d'équilibre de (S) :

$\vec{P} + \vec{T}_o + \vec{R} = \vec{0}$

Projection sur (x'x) :

$-\|\vec{P}_x\| + \|\vec{T}_o\| = 0 \Leftrightarrow -M\|\vec{g}\|\sin\alpha + K(l - l_o) = 0$

2°) Choc élastique : il y a conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique du système (S, C) :

$$\begin{cases} \vec{p}_i = \vec{p}_f \\ E_{c_i} = E_{c_f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\vec{v}_C = m\vec{v}'_C + M\vec{v}_o & (1) \\ \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_C'^2 + \frac{1}{2}Mv_o^2 & (2) \end{cases}$$

Le mouvement des deux solides est rectiligne selon (x'x), puisqu'ils sont contraints à coulisser sur (Q) : les vecteurs vitesses sont alors colinéaires .
(1) devient : $mv_C = mv'_C + Mv_o$.

Le système d'équations pourra alors s'écrire : $\begin{cases} m(v_C - v'_C) = Mv_o & (3) \\ m(v_C^2 - v_C'^2) = Mv_o^2 & (2) \end{cases}$

$\dfrac{(2)}{(3)}$: $v_C + v'_C = v_o$ (4)

(3) et (4) donnent : $v_C = \dfrac{v_o}{2}\left(1 + \dfrac{M}{m}\right)$. ***AN***: $v_C = 2{,}4$ m.s^{-1}.

3°)a) La R. F. D appliquée à (S) s'écrit :

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = M\vec{a}$

Projection sur $(x'x)$: $P_x + T = Ma_x$

$\Rightarrow \quad -M\|\vec{g}\|\sin\alpha - k\Delta l = Ma_x$

$\overrightarrow{\Delta l} = \overrightarrow{\Delta l_o} + \overrightarrow{OG(t)}$, soit : $\Delta l = \Delta l_o + x(t)$

avec $\Delta l_o = -(l - l_o)$

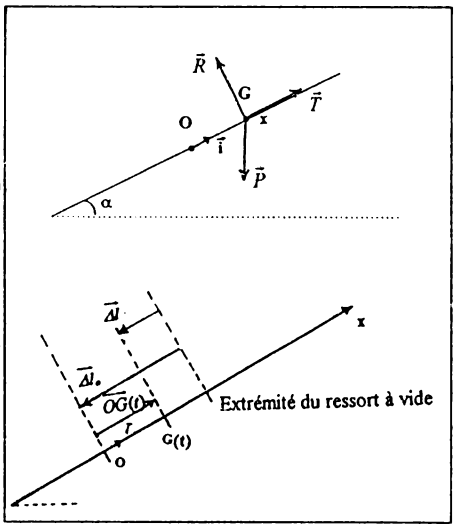
En remplaçant Δl par son expression il vient :

$$-M\|\vec{g}\|\sin\alpha - K\left(-(l-l_o)+x\right) = M\frac{d^2x}{dt^2}$$

En tenant compte de la condition d'équilibre : $-M\|\vec{g}\|\sin\alpha + K(l-l_o) = 0$;

on obtient : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{M}x = 0$;

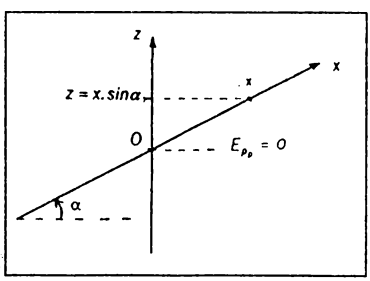
c'est l'équation différentielle d'un mouvement rectiligne sinusoïdal, d'où l'oscillateur constitué par (R) et (S) est harmonique.



b) $E = E_{c(S)} + E_{p_p(S+terre)} + E_{p_e(R)}$

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + M\|\vec{g}\|z + \frac{1}{2}K(\Delta l)^2$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2 + M\|\vec{g}\|x\sin\alpha + \frac{1}{2}K\left(x-(l-l_o)\right)^2$$



$$E = \frac{1}{2}Mv^2 - \underbrace{\left(K(l-l_o) - M\|\vec{g}\|\sin\alpha\right)}_{0}x + \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}K(l-l_o)^2.$$

D'où : $E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}K(l-l_o)^2$.

c) Le système étant conservatif : E = constante.

Choisissons : t_1 date juste après le choc : ($v = v_o$ *et* $x = 0$)

t_2 date où l'élongation est extrémale : ($v = 0$)

$$E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}Mv_o^2 + \frac{1}{2}K(l-l_o)^2 = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}K(l-l_o)^2.$$

Soit : $\frac{1}{2}Mv_o^2 = \frac{1}{2}Kx^2$; d'où : $x = \pm\|\vec{v}_o\|\sqrt{\frac{M}{K}} = \pm\frac{\|\vec{v}_o\|}{\omega_o}$.

Comme $x_A > x_B$, alors : $x_A = +\frac{\|\vec{v}_o\|}{\omega_o}$ et $x_B = -\frac{\|\vec{v}_o\|}{\omega_o}$.

AN: $x_A = 4.10^{-2}$ m et $x_B = -4.10^{-2}$ m .

PARTIE B/

1°) Au cours des oscillations forcées, l'excitateur fournit toujours de l'énergie au résonateur. En effet celui-ci dissipe une partie de l'énergie mécanique sous forme de travail de la force de frottement.

2°)a) $x(t) = X_m \sin(\omega_e t + \varphi_x)$. D'après le diagramme relatif à $x(t)$:

$X_m = 3.10^{-2}$ m; $T_e = \frac{\pi}{35}$ s $\Rightarrow$ $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = 70\,\text{rad.s}^{-1}$.

D'autre part ; à t = 0, on a : $x\,(t = 0) = -1{,}5.10^{-2}\,\text{m} = -\frac{X_m}{2}$ et $\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{t=0} > 0$

$$\begin{cases} x(t=0) = X_m \sin\varphi_x = -\dfrac{X_m}{2} \\ v(t=0) = X_m \omega_e \cos\varphi_x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi_x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos\varphi_x > 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi_x = -\frac{\pi}{6}\,\text{rad.}$$

D'où : $x(t) = 3.10^{-2} \sin(70t - \frac{\pi}{6})$ en m et t en s..

De même pour $F(t)$: $F_m = 3\,\text{N}$, donc: $F(t) = 3\sin(70t)$ en N et t en s.

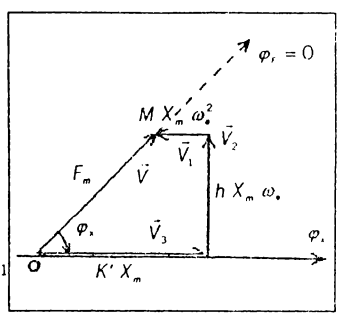
Pour toute valeur de ω_e, on a $F(t)$ en avance de phase par rapport à $x(t)$.

b) Remplaçons $x(t)$ par son expression dans l'équation différentielle, on aura :

$$\underbrace{MX_m\omega_e^2 \sin(\omega_e t + \varphi_x + \pi)}_{\downarrow} + \underbrace{hX_m\omega_e \sin(\omega_e t + \varphi_x + \frac{\pi}{2})}_{\downarrow} + \underbrace{K'X_m \sin(\omega_e t + \varphi_x)}_{\downarrow} = \underbrace{F(t)}_{\downarrow}$$

$$\vec{V}_1(MX_m\omega_e^2\ ;\ \varphi_x + \pi) + \vec{V}_2(hX_m\omega_e\ ;\ \varphi_x + \tfrac{\pi}{2}) + \vec{V}_3(K'X_m\ ;\ \varphi_x) = \vec{V}(F_m;0)$$

Exploitons géométriquement la construction de Fresnel correspondante :



$\sin(-\varphi_x) = \frac{hX_m\omega_e}{F_m}$, d'où: $h = \frac{F_m \sin(-\varphi_x)}{X_m\omega_e}$.

AN: $h = 0{,}714$ (SI).

D'autre part : $\cos(-\varphi_x) = \frac{(K' - M\omega_e^2)X_m}{F_m}$

$\Rightarrow K' = \frac{F_m \cos(-\varphi_x)}{X_m} + M\omega_e^2$. ***AN*** : $K' = 331{,}6\,\text{N.m}^{-1}$

3°)a) $X_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{h^2\omega_e^2 + (K' - M\omega_e^2)^2}}$ et $V_m = X_m\omega_e = \dfrac{F_m}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{K'}{\omega_e} - M\omega_e\right)^2}}$.

b) $\dfrac{F_m}{V_m} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{K'}{\omega_e} - M\omega_e\right)^2}$.

Les analogies mécanique - électrique sont :

$F_m \longleftrightarrow U_m \qquad V_m \longleftrightarrow I_m$

$K' \longleftrightarrow \frac{1}{C} \qquad M \longleftrightarrow L \qquad h \longleftrightarrow R$

L'analogue électrique du rapport $\frac{F_m}{V_m}$ est donc :

$\frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega_e} - L\omega_e\right)^2} = Z$: appelée impédance du circuit électrique.

Exercice n°7 :

1°)a) Système : { (S), R, terre }.

$E = E_{c(S)} + E_{p_e(R)} + E_{p_p(S+terre)}$

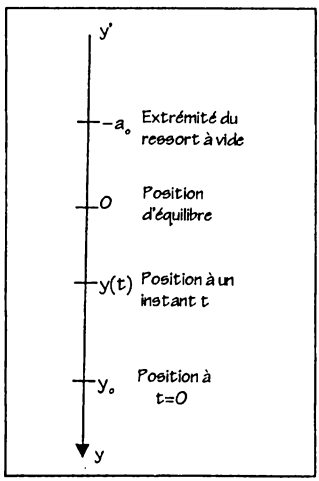
$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K(a_o + y)^2 - m\|\vec{g}\|y$

$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K a_o^2 + \underbrace{\left(K a_o - m\|\vec{g}\|\right)}_{0} y + \frac{1}{2}K y^2$

(condition d'équilibre)

d'où : $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K a_o^2 + \frac{1}{2}K y^2$

$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K(a_o^2 + y^2)$



b) Appliquons le théorème de la variation de l'énergie mécanique au système { (S), ressort, terre } entre deux instants quelconques de dates t_1 et t_2. $\Delta E\}_{t_1}^{t_2} = \sum W_{\vec{F}ext}\}_{t_1}^{t_2} + \sum W_{\vec{F}int.dissip.}\}_{t_1}^{t_2}$

Bilan : * des forces extérieures : réaction du support $\vec{R}$

* des forces intérieures dissipatives : aucune.

$W_{\vec{R}} = 0$ car son point d'application est fixe, donc $\Delta E\}_{t_1}^{t_2} = 0$

$\Rightarrow E =$ constante : le système est conservatif.

Or à $t = 0$: $v_o = 0$ et $y = y_o$, d'où : $E = E(t=0) = \frac{1}{2}K(a_o^2 + y_o^2)$.

c) E étant constante $\forall t$: $\frac{dE}{dt} = 0$ avec $v(t) = \frac{dy(t)}{dt} \neq 0$

$\frac{dE}{dt} = \left(m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + K y(t)\right)\frac{dy(t)}{dt}$, d'où : $m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + K y(t) = 0$: C'est l'équation différentielle d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'équation horaire :

$$y(t) = y_m \sin(\omega_o t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega_o^2 = \frac{K}{m}$$

2°)a) $E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}K(a_o^2+y^2)=\frac{1}{2}K(a_o^2+y_o^2)$; après simplification on obtient :

$$v^2=-\frac{K}{m}y^2+\frac{K}{m}y_o^2 .$$

On remarque que v^2 s'exprime sous la forme : $v^2 = a\,y^2 + b$; équation d'une droite affine de pente $a=-\frac{K}{m}=-\omega_o^2 < 0$.

b) - Calculons la pente a : Soient les deux points d'intersection de la courbe avec les deux axes : A (0 ; 0,25) ; B ($2{,}5.10^{-3}$; 0).

$a=\frac{0-0{,}25}{2{,}5.10^{-3}-0}$; d'où : $\omega_o = 10\,\text{rad.s}^{-1}$.

L'ordonnée à l'origine est : $v_A^2=\omega_o^2 y_o^2$, d'où : $y_o=\pm\frac{V_A}{\omega_o}$;

y_o étant une amplitude, on choisira la solution positive. ***AN*** : $y_o = 5.10^{-2}$ m.

NB : $y_o = y_m$ car le solide (S) écarté de sa position d'équilibre est libéré sans vitesse initiale. En effet, on sait que :

$y^2(t)+\frac{v^2(t)}{\omega_o^2}=y_m^2$; à $t = 0$: $v(t=0)=v_o=0$ et $y(t=0)=y_o$; d'où : $y_m = y_o$

- D'après la condition d'équilibre : $m\|\vec{g}\|-K a_o=0 \Leftrightarrow a_o=\frac{m\|\vec{g}\|}{K}=\frac{\|\vec{g}\|}{\omega_o^2}$;

AN : $a_o = 0{,}1$ m.

c) $y(t)=y_o\,sin(\omega_o t+\varphi)$. Déterminons φ :

A $t = 0$, $y(t=0)=y_o=y_o\,sin\varphi \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{2}$ rad ; d'où :

$y(t)=5.10^{-2}\,sin(10t+\frac{\pi}{2})$ en m et t en s.

d) $E=\frac{1}{2}K(a_o^2+y_o^2) \Leftrightarrow K=\frac{2E}{a_o^2+y_o^2}$. ***AN*** : $K = 100$ N.m^{-1}.

D'autre part : $\omega_o^2=\frac{K}{m}$; d'où : $m=\frac{K}{\omega_o^2}$. ***AN*** : m = 1 Kg.

3°)a) Appliquons la R. F. D au solide (S) soumis aux forces extérieures : $\vec{P},\vec{T}$ et $\vec{F}$;

$\vec{P}+\vec{T}+\vec{F}=m\vec{a}$. Projetons sur (y'y) : $P + T + F = m a_y \Rightarrow$

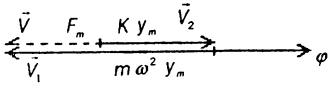
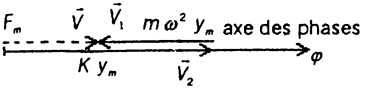
$$m\|\vec{g}\|-K(a_o+y)+F=m\frac{d^2y}{dt^2}$$

En tenant compte de la condition d'équilibre : $m\|\vec{g}\|-K a_o=0$, il vient :

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+K y=F(t) .$$

b) Remplaçons dans l'équation différentielle $y(t)$ et $F(t)$ par leur expression :

$$\underbrace{m\,y_m\,\omega^2\,\sin(\omega t+\varphi+\pi)}_{\vec{V}_1(m\,y_m\,\omega^2\,;\,\varphi+\pi)} + \underbrace{K\,y_m\,\sin(\omega t+\varphi)}_{\vec{V}_2(K\,y_m\,;\,\varphi)} = \underbrace{F_m\,\sin(\omega t)}_{\vec{V}(F_m\,;\,0)}$$

	
$\Delta\varphi=\varphi_F-\varphi=\pi$ avec $\varphi_F=0$ $y(t)$ et $F(t)$ sont en opposition de phase . $\|\vec{V}_1\| > \|\vec{V}_2\| \Rightarrow m\omega^2 > K$ Soit : $\omega > \omega_0$	$\Delta\varphi=\varphi_F-\varphi=0$ avec $\varphi_F=0$ $y(t)$ et $F(t)$ sont en phase $\|\vec{V}_1\| < \|\vec{V}_2\| \Rightarrow m\omega^2 < K$ Soit : $\omega < \omega_0$

c) Les vecteurs de Fresnel étant colinéaires, on a : $\|\vec{V}\| = \left|\,\|\vec{V}_1\| - \|\vec{V}_2\|\,\right|$, d'où :

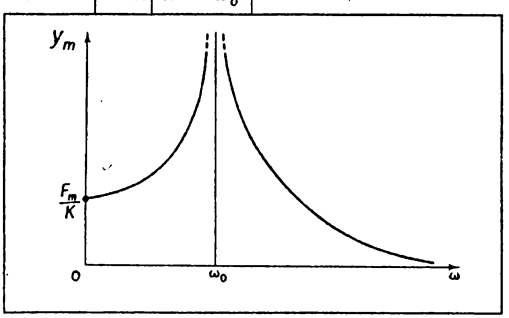
$F_m = y_m\left|\,m\omega^2 - K\,\right|$, soit : $y_m = \dfrac{F_m}{\left|\,m\omega^2-K\,\right|} = \dfrac{F_m}{m\left|\,\omega^2-\omega_0^2\,\right|}$

Pour $\omega=\omega_0$, y_m tend vers ∞. Ceci provoquerait la destruction du système.

Pour $\omega=0 \Rightarrow y_m = \dfrac{F_m}{K}$

Pour $\omega\to\infty \Rightarrow y_m\to 0$

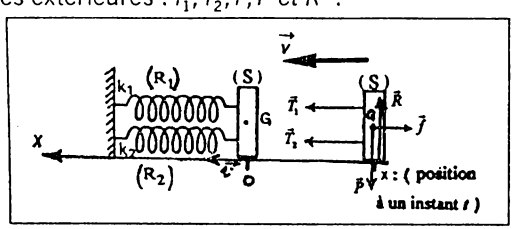
Pour $\omega\to\omega_0 \Rightarrow y_m\to\infty$



Exercice n°8 :

PARTIE A/

1°) Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au solide (S) soumis aux forces extérieures : $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{f}, \vec{P}$ et $\vec{R}$:



$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{f} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$. Projetons sur l'axe $(x'x)$:

$T_1 + T_2 + f = ma_x$

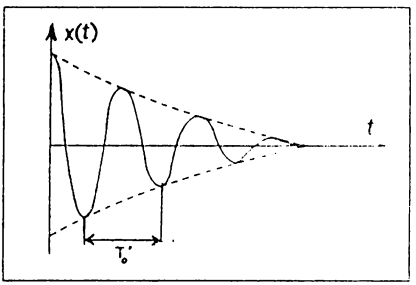
$-kx - kx - h\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$; d'où : $m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + 2kx = 0$:

C'est l'équation différentielle des oscillations harmoniques libres amorties.

2°) h étant faible, le régime d'oscillations libres amorties est pseudo-périodique.

A l'instant initial, on a : $x(t=0) = a_o$.

La pseudo-période est : $T'_o \approx T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$



3°)a) Système constituant l'oscillateur est : { R_1, R_2, S }.

L'expression de l'énergie mécanique de l'oscillateur à l'instant t s'écrit :

$E = E_{c(s)} + E_{p_e(R_1)} + E_{p_e(R_2)} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 + kx^2$.

$\frac{dE}{dt} = mv\frac{dv}{dt} + 2kx\frac{dx}{dt} = v\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + 2kx\right)$.

b) D'après l'équation différentielle : $m\frac{d^2x}{dt^2} + 2kx = -h\frac{dx}{dt}$;

d'où : $\frac{dE}{dt} = -hv\frac{dx}{dt}, f = -hv$ est considérée constante pendant la durée dt ;

$dE = f \cdot dx = dW_f < 0$.

c) Comme $dE < 0$, E est décroissante au cours du temps. D'autre part E étant proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations, cette amplitude est alors décroissante au cours du temps.

d) Soient $E_o, E_1, \ldots\ldots E_n$, les énergies mécaniques de l'oscillateur, respectivement aux instants : $t_o = 0, t_1 = T'_o, \ldots\ldots, t_n = nT'_o$.

On a : $E_o = ka_o^2$

$$E_1 = E_o - \frac{1}{16}E_o = \frac{15}{16}E_o$$

$$\vdots$$

$$E_n = E_{n-1} - \frac{1}{16}E_{n-1} = \left(\frac{15}{16}\right)^n E_o \quad \Leftrightarrow \quad k a_n^2 = \left(\frac{15}{16}\right)^n k a_o^2; \text{ soit :}$$

$$\left(\frac{a_n}{a_o}\right)^2 = \left(\frac{15}{16}\right)^n \quad \Rightarrow \quad Log\left(\frac{a_n}{a_o}\right)^2 = n Log\left(\frac{15}{16}\right) ;$$

d'où : $n = \dfrac{2\,Log\left(\frac{a_n}{a_o}\right)}{Log\left(\frac{15}{16}\right)}$. ***AN*** : n = 21,5 oscillations.

PARTIE B/

1°) Appliquons de nouveau la relation fondamentale de la dynamique au solide (S). On obtient : $m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + h\dfrac{dx(t)}{dt} + 2k\,x(t) = F(t)$

2°)a) Remplaçons $x(t)$ et $F(t)$ par leur expression dans l'équation différentielle, on aura :

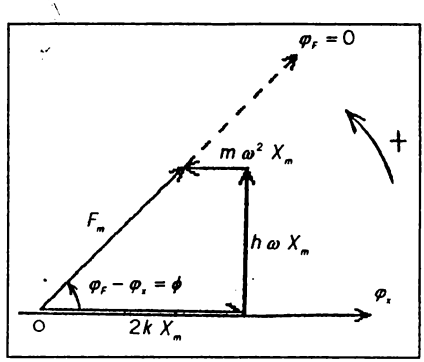
$$\underbrace{mX_m\omega^2 \cos(\omega t - \Phi + \pi)}_{\downarrow} + \underbrace{h\omega X_m \cos(\omega t - \Phi + \frac{\pi}{2})}_{\downarrow} + \underbrace{2kX_m \cos(\omega t - \Phi)}_{\downarrow} = \underbrace{F_m \cos(\omega t)}_{\downarrow}$$

$$\vec{V}_1(mX_m\omega^2 ; -\Phi + \pi) + \vec{V}_2(h\omega X_m ; -\Phi + \frac{\pi}{2}) + \vec{V}_3(2kX_m ; -\Phi) = \vec{V}(F_m ; 0)$$

Construction de Fresnel associée (cas où $2k > m\omega^2$) :
L'exploitation géométrique de la construction donne :

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 + (2k - m\omega^2)^2}} \quad \text{et}$$

$$tg\Phi = \frac{h\omega}{2k - m\omega^2}$$



b) $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = X_m\omega \cos(\omega t - \Phi + \frac{\pi}{2})$.

$= V_m \cos(\omega t - \Phi + \frac{\pi}{2})$

$$V_m = X_m\omega = \frac{F_m\,\omega}{\sqrt{h^2\omega^2 + (2k - m\omega^2)^2}}$$

$$= \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + \left(2\frac{k}{\omega} - m\omega\right)^2}}.$$

3°)a) Dans le cas où : $\varphi_F - \varphi_x = \Phi = \dfrac{\pi}{2}$ rad, la construction de Fresnel devient :

Nous constatons alors que $2kX_m = m\omega^2 X_m$;

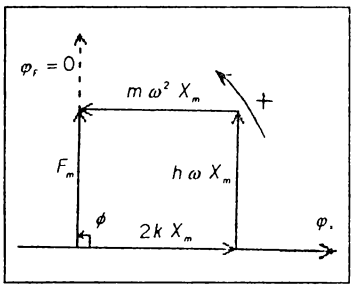
Soit, $\omega^2 = \dfrac{2k}{m} = \omega_o^2$:

c'est l'état de résonance de vitesse.

Autre méthode : $\varphi_F - \varphi_x = \varphi_F - \varphi_v + \varphi_v - \varphi_x = \dfrac{\pi}{2}$,

Or on a toujours: $\varphi_v - \varphi_x = \dfrac{\pi}{2}$, d'où : $\varphi_F - \varphi_v = 0$,

c'est l'état de résonance de vitesse.

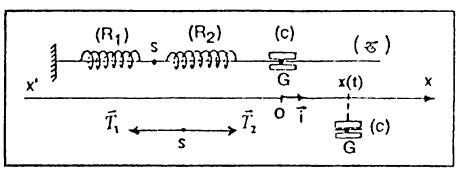


b) A la résonance de vitesse : $F_m = hX_m\omega_o$;

d'où: $h = \dfrac{F_m}{X_m}\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$. ***AN***: h = 5 (SI).

Exercice n°9 :

1°) Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au point de soudure noté s soumis aux deux tensions $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$:

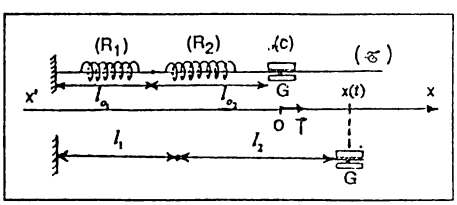


$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m_s\vec{a} \ ;$$

m_s étant la masse du point de soudure considérée comme négligeable :

$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$; d'où $\left\|\vec{T}_1\right\| = \left\|\vec{T}_2\right\|$.

2°) A la date t, la longueur des deux ressorts est : $l_1 + l_2$. L'abscisse de G est : $x = (l_1 + l_2) - (l_{o_1} + l_{o_2})$, ou :



$$x = (l_1 - l_{o_1}) + (l_2 - l_{o_2}) = x_1 + x_2 \quad (1)$$

D'autre part : $\left\|\vec{T}_1\right\| = \left\|\vec{T}_2\right\|$

$$\Rightarrow \ k_1 x_1 = k_2 x_2 \quad (2)$$

La résolution du système d'équations (1) et (2) donne :

$$x_1 = \left(\frac{k_2}{k_1 + k_2}\right)x \quad \text{et} \quad x_2 = \left(\frac{k_1}{k_1 + k_2}\right)x \ ;$$

A $t = 0$; $x = x_o = 6.10^{-2}$ m, donc $x_1 = 4.10^{-2}$ m et $x_2 = 2.10^{-2}$ m.

3°)a) $E = E_{c(C)} + E_{p_e(R_1)} + E_{p_e(R_2)} + E_{p_p(C+terre)}$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2 \quad \text{avec} \quad E_{p_p(C+terre)} = 0$$

b) En remplaçant x_1 *et* x_2 par leur expression respective, il vient :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)x^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{avec} \quad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \ ;$$

les deux ressorts sont équivalents à un ressort unique de constante de raideur k. ***AN***: $k = 20\,\text{N.m}^{-1}$.

4°)a) Montrons d'abord que le système est conservatif :

Bilan des forces extérieures : · la réaction $\vec{R}_T$ de la tige sur (C)

· la réaction $\vec{R}_s$ du support sur (R_1)

$W_{\vec{R}_T} = 0$; puisque $\vec{R}_T$ est perpendiculaire au déplacement.

$W_{\vec{R}_s} = 0$; car le point d'application de $\vec{R}_s$ est fixe.

Il n'existe pas de forces intérieures dissipatives, par suite :

$\Delta E\}_{t_1}^{t_2} = \sum W_{\vec{F}_{ext}}\}_{t_1}^{t_2} + \sum W_{\vec{F}_{int.dissip.}}\}_{t_1}^{t_2} = 0$; d'où l'énergie totale du système est conservée.

E = constante : $\dfrac{dE}{dt} = 0 = mv\dfrac{dv}{dt} + kx\dfrac{dx}{dt}$; $v \neq 0$; d'où : $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$: C'est l'équation différentielle d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation $\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. ***AN***: $\omega_o = 10\,\text{rad.s}^{-1}$.

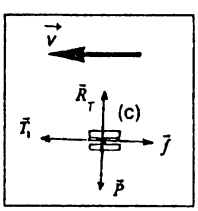
b) L'équation horaire du mouvement est la solution générale de l'équation différentielle. Elle s'écrira : $x(t) = X_m \sin(\omega_o t + \varphi)$.

A $t = 0$: $\begin{cases} x(t=0) = x_o = X_m \sin\varphi \\ v(t=0) = v_o = X_m\omega_o\cos\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow tg\varphi = \dfrac{\omega_o x_o}{v_o} = 1$ et $\cos\varphi > 0$.

Donc $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ rad, et par suite : $X_m = \dfrac{x_o}{\sin\dfrac{\pi}{4}} = 6\sqrt{2}.10^{-2}$ m.

D'où : $x(t) = 6\sqrt{2}.10^{-2}\sin(10t + \dfrac{\pi}{4})$ en m et t en s.

5°)a) Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au solide (C) :



$$\vec{P} + \vec{R}_T + \vec{T} + \vec{f} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Projetons sur l'axe $(x'x)$: $T + f + F = ma_x$.

Soit : $-kx - h\dfrac{dx}{dt} + F = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow m\dfrac{d^2x}{dt^2} + h\dfrac{dx}{dt} + kx = F$

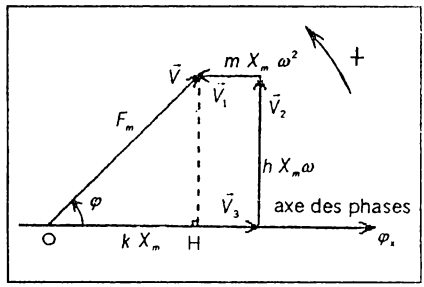
b) Remplaçons $x(t)$ et $F(t)$ par leur expression, l'équation différentielle s'écrira alors :

$$\underbrace{mX_m\omega^2\sin(\omega t + \pi)}_{\downarrow} + \underbrace{hX_m\omega\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})}_{\downarrow} + \underbrace{kX_m\sin(\omega t)}_{\downarrow} = \underbrace{F_m\sin(\omega t + \varphi)}_{\downarrow}$$

$$\vec{V}_1(mX_m\omega^2\,;\pi) + \vec{V}_2(hX_m\omega\,;\frac{\pi}{2}) + \vec{V}_3(kX_m\,;0) = \vec{V}(F_m\,;\varphi)$$

$\vec{V}, \vec{V}_1, \vec{V}_2$ *et* $\vec{V}_3$ sont respectivement les vecteurs de Fresnel associés à $F(t)$ et à ses trois composantes.
Le théorème de pythagore appliqué au triangle
OHM s'écrit :
$F_m^2 = X_m^2\left((h\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2\right)$;

d'où: $X_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{(h\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2}}$.



En posant : $\dfrac{h}{m} = \dfrac{1}{\tau}$ et $k = m\omega_0^2$, il vient : $X_m = \dfrac{F_m}{m\sqrt{\dfrac{\omega^2}{\tau^2} + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$.

c) A la résonance d'élongation, l'amplitude X_m est maximale pour $\omega = \omega_r$.

X_m est maximale lorsque $D(\omega) = \dfrac{\omega^2}{\tau^2} + (\omega_0^2 - \omega^2)^2$ est minimale, soit :

$\dfrac{dD(\omega)}{d\omega} = 0$; $\dfrac{dD(\omega)}{d\omega} = \dfrac{2\omega}{\tau^2} - 2\times 2\omega(\omega_0^2 - \omega^2)$, donc , pour $\omega = \omega_r$ on a:

$2\omega_r\left(\dfrac{1}{\tau^2} - 2(\omega_0^2 - \omega_r^2)\right) = 0$.

$\omega_r \neq 0$, alors: $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{1}{2\tau^2}}$. ***AN***: $\omega_r = 9{,}92\,\text{rad.s}^{-1}$.

Exercice n°10 :

1°) Appliquons la R. F. D au solide (S) soumis aux forces extérieures ;
$\vec{P}, \vec{R}, \vec{f}, \vec{F}$ *et* $\vec{T}$: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{F} + \vec{T} = m\vec{a}$

Projection sur $(x'x)$: $T + f + F = ma_x \Rightarrow -kx - hv + F = m\dfrac{dv}{dt}$; ou encore :

$F = m\dfrac{dv}{dt} + hv + k\int v\,dt$.

2°)a) En remplaçant F et v par leur expression dans l'équation différentielle, on aura : $F_m \sin(\omega t + \varphi_F) = mV_m\omega \sin(\omega t + \dfrac{\pi}{2}) + hV_m \sin(\omega t) + \dfrac{kV_m}{\omega}\sin(\omega t - \dfrac{\pi}{2})$

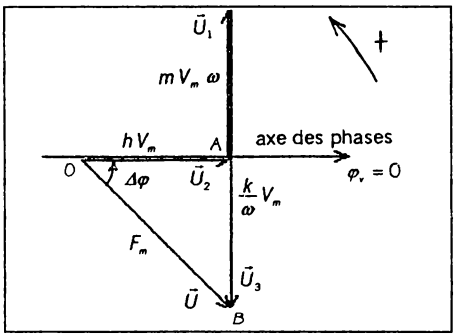
Cherchons la relation entre F_m et V_m par la méthode de Fresnel : les vecteurs de Fresnel associés aux grandeurs : $F(t)$, $m\dfrac{dv(t)}{dt}$, $hv(t)$ et $k\int v(t)dt$ sont respectivement :

$\vec{U}(F_m ; \varphi_F)$, $\vec{U}_1(m\omega V_m ; \dfrac{\pi}{2})$, $\vec{U}_2(hV_m ; 0)$, $\vec{U}_3(\dfrac{kV_m}{\omega} ; -\dfrac{\pi}{2})$.

On a : $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3$; de plus remarquons que $\dfrac{k}{\omega} > m\omega \Leftrightarrow \omega_0 > \omega$.

En effet : $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = 70{,}71\,\text{rad.s}^{-1}$ et $\omega = 16\pi = 50{,}26\,\text{rad.s}^{-1}$.

Construction de Fresnel : A partir du triangle OAB, on a : $OB^2 = OA^2 + AB^2$;



d'où : $F_m = V_m\sqrt{h^2 + \left(\frac{k}{\omega} - m\omega\right)^2}$.

AN : F_m = 10,3 N.

b) $tg(\Delta\varphi) = \dfrac{\frac{k}{\omega} - m\omega}{h}$.

AN : $tg(\Delta\varphi) = 3{,}28$.

d'où : $\Delta\varphi = \varphi_v - \varphi_F = 1{,}27\,\text{rad}$,

soit $\varphi_F = -1{,}27\,\text{rad}$

L'expression de $F(t)$ est alors :

$F(t) = 10{,}3\sin(16\pi t - 1{,}27)$ en N, t en s.

3°) Les analogues électromécaniques sont :

$F_m \longleftrightarrow U_m$; $V_m \longleftrightarrow I_m$

$Z_{\text{électrique}} = \dfrac{U_m}{I_m}$; d'où : $Z_{\text{mécanique}} = \dfrac{F_m}{V_m} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{k}{\omega} - m\omega\right)^2}$.

AN : $Z_{\text{mécanique}}$ = 2,57 N.s.m^{-1}.

4°) La puissance mécanique moyenne dissipée par l'oscillateur s'écrit :

$P_m = \frac{1}{2}F_m V_m \cos(\Delta\varphi) = \frac{1}{2}hV_m^2$. ***AN*** : P_m = 6 W.

5°)a) $\varphi_F = \varphi_v$: C'est l'état de résonance de vitesse, donc : $\omega = \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m'}}$

d'où : $m' = \dfrac{k}{\omega^2}$ avec $\omega = 16\pi\,\text{rad.s}^{-1}$. ***AN*** : $m' \approx 0{,}1\,\text{Kg}$.

b) $v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi_v)$

avec $V_m = \dfrac{F_m}{h}$. ***AN*** : $V_m = 13{,}73\,\text{m.s}^{-1}$.

$\omega = \omega_o$. ***AN*** : $\omega = 16\pi$ rad.s^{-1}.

$\varphi_v = \varphi_F$. ***AN*** : $\varphi_v = -1{,}27\,\text{rad}$.

d'où : $v(t) = 13{,}73\sin(16\pi t - 1{,}27)$ en m.s^{-1}, t en s.

c) $P_m = \frac{1}{2}hV_m^2$; or $V_m = \dfrac{F_m}{h}$; d'où $P_m = \frac{1}{2}\dfrac{F_m^2}{h}$. ***AN*** : P_m = 70,7 W.

Remarquons que P_m est maximale puisque V_m est maximale. Ceci était prévisible parce que la résonance de vitesse engendre une résonance de puissance.

Exercice n°11 :

1°)a) La résonance d'élongation correspond au maximum d'amplitude.
D'après la courbe : $N_R = 20$ Hz.

b) *) Pour $N = 0$, $Y_m = 7$ mm.

*) Pour $N = N_R$, $Y_m = (Y_m)_{max} = 12$ mm.

2°) A la résonance, Y_m est maximale correspondant à

$D(N) = 4\pi^2h^2N^2 + (4\pi^2N^2M - K)^2$ minimal, soit $\dfrac{dD(N)}{dN} = 0$

$\dfrac{dD(N)}{dN} = 8\pi^2h^2N + 2(8\pi^2NM)(4\pi^2N^2M - K)$; d'où, pour $N = N_R$:

$8\pi^2N_R\left(h^2 + 2M(4\pi^2N_R^2M - K)\right) = 0$; $8\pi^2N_R \neq 0 \Rightarrow$

$h^2 + 2M(4\pi^2N_R^2M - K) = 0$, d'où : $N_R^2 = \dfrac{K}{4\pi^2M} - \dfrac{h^2}{8\pi^2M^2} = N_o^2 - \dfrac{h^2}{8\pi^2M^2}$

3°)a) Pour $N = 0$, $Y_m = \dfrac{F_m}{K}$; d'où : $F_m = KY_m$. ***AN*** : $F_m = 2{,}8$ N.

b) A partir de l'expression de N_R, on a : $h = \pi M\sqrt{8(N_o^2 - N_R^2)}$.

AN : $h = 1{,}83$ (SI).

c) $y(t) = Y_m \sin(2\pi Nt + \varphi)$. A la résonance d'élongation :

*) $Y_m = (Y_m)_{max} = 12$ mm.

*) $N = N_R = 20$ Hz.

*) $tg(\varphi_F - \varphi_y) = \dfrac{2\pi N_R h}{K - 4\pi^2N_R^2M}$. ***AN*** : $tg(\varphi_F - \varphi_y) = 2{,}74$; d'où :

$\varphi_F - \varphi_y = 1{,}22\,\text{rad}$, donc $\varphi_y = -1{,}22\,\text{rad}$

$y(t) = 12.10^{-3}\sin(40\pi t - 1{,}22)$ en m, t en s.

4°)a) Il y a résonance d'élongation tant que $N_R^2 \geq 0$ donc :

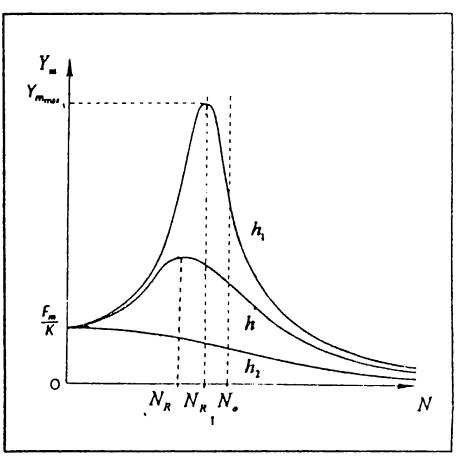
$N_o^2 - \dfrac{h^2}{8\pi^2M^2} \geq 0$, d'où :

$h \leq 2\pi MN_o\sqrt{2} = \sqrt{2KM} = h_o$

AN : $h_o = 4$ (*SI*).

Lorsque la valeur de h devient très élevée, en tendant vers la limite h_o, la résonance devient impossible.

b) Voir figure.



Exercice n°1 :

1°)a) L'énergie électromagnétique W est : $W = \frac{1}{2}Li^2(t) + \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}$.

b) Le circuit (L,C) ne présente aucun caractère résistif, par suite il est conservatif : W = C^te.

$\frac{dW}{dt} = 0 = Li\frac{di(t)}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq(t)}{dt}$; or $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$; d'où: $\frac{dq(t)}{dt}\left(L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{dt}\right) = 0$;

comme $\frac{dq(t)}{dt} \neq 0$, pour t quelconque, on a alors: $\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}q(t) = 0$

C'est l'équation différentielle de l'oscillateur libre non amorti.
La solution générale de l'équation différentielle se met sous la forme :

$$q(t) = Q_m \sin(\omega_o t + \varphi_q)$$

2°)a) Cherchons l'expression de l'énergie magnétique $W_L(t)$ en fonction du temps.

$W_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$; or $i(t) = I_m \sin(\omega_o t + \varphi_i)$; d'où:

$W_L(t) = \frac{1}{2}LI_m^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi_i) = \frac{1}{2}LI_m^2\left(\frac{1 - \cos(2\omega_o t + 2\varphi_i)}{2}\right)$, ou encore:

$W_L(t) = \frac{1}{4}LI_m^2 - \frac{1}{4}LI_m^2\cos(2\omega_o t + 2\varphi_i)$

Remarquons que $W_L(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation $\Omega_o = 2\omega_o$, et de période T' telle que : $\Omega_o = \frac{2\pi}{T'}$; d'où: $\omega_o = \frac{\pi}{T'}$.

AN: D'après la courbe $W_L = f(t)$, $T' = 2\pi.10^{-4}$ s $\Rightarrow$ $\omega_o = 5.10^3$ rad.s^{-1} .

b) $W_{L_{max}} = \frac{1}{2}LI_m^2$; d'où: $L = \frac{2W_{L_{max}}}{I_m^2}$

AN: D'après les courbes $W_L = f(i)$ et $W_L = g(t)$, on a respectivement:

$I_m = 2$ A et $W_{L_{max}} = 2.10^{-3}$ J, d'où : $L = 10^{-3}$ H, et par suite : $C = \frac{1}{L\omega_o^2} = 40\mu F$

et $Q_m = \frac{I_m}{\omega_o} = 4.10^{-4}$ C.

c) D'après la loi d'Ohm pour un générateur : $U_{AB} = E - ri$, puisque $r = 0$

alors $E = U_{AB} = U_{C_m} = \frac{Q_m}{C}$ (interrupteur dans la position (1)). ***AN***: E = 10 V.

3°) $q(t) = Q_m \sin(\omega_o t + \varphi_q)$.

A $t = 0$; $q(t=0) = Q_m = Q_m \sin\varphi_q$ $\Rightarrow$ $\sin\varphi_q = 1$ $\Rightarrow$ $\varphi_q = +\frac{\pi}{2}$ rad.

Donc : $q(t) = 4.10^{-4}\sin(5.10^3 t + \frac{\pi}{2})$ en C, t en s.

$i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} = Q_m\,\omega_o\cos(\omega_o t + \varphi_q)$; soit numériquement :

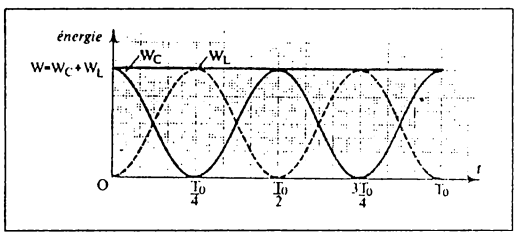
$i(t) = 2\cos(5.10^3 t + \dfrac{\pi}{2})$ en A, t en s.

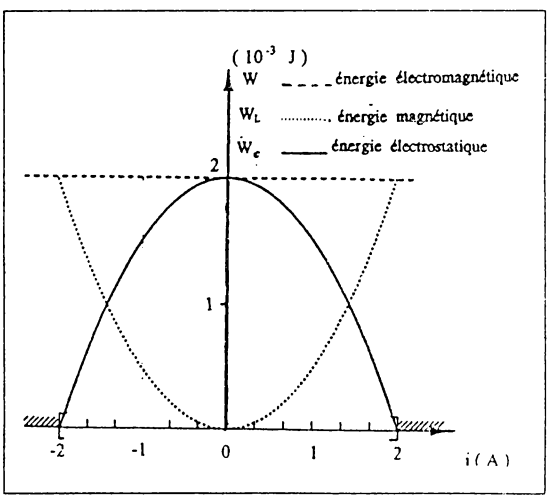
$u_C(t) = \dfrac{q(t)}{C} = \dfrac{Q_m}{C}\sin(\omega_o t + \varphi_q)$; soit numériquement :

$u_C(t) = 10\sin(5.10^3 t + \dfrac{\pi}{2})$ en V, t en s.

$W = W_C + W_L = 2.10^{-3}$ J.

$W_C = W - W_L$. Les figures-2 et -3 sont alors complétées comme suit :



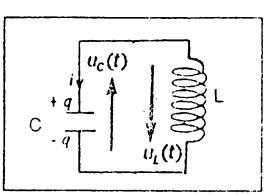


Exercice n°2 :

1°)a) D'après la loi des mailles : $u_L(t) + u_C(t) = 0$, or

$u_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$ avec $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ et $q(t) = C\,u_C(t)$

donc $u_L(t) = LC\dfrac{d^2u_C(t)}{dt^2}$.



D'où l'équation différentielle : $\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+\frac{1}{LC}u_C(t)=0$.

b) La pulsation propre de l'oscillateur est :

$$\omega_o=\frac{1}{\sqrt{LC}}=2\pi N_o \Rightarrow N_o=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

2°)a) $E = E_C(t) + E_L(t) = \frac{1}{2}Cu_C^2(t)+\frac{1}{2}Li^2(t) \Rightarrow$

$$E=\frac{1}{2}Cu_C^2(t)+\frac{1}{2}L\left(\frac{dq(t)}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}Cu_C^2(t)+\frac{1}{2}L\left(C\frac{du_C(t)}{dt}\right)^2,$$

d'où : $E=\frac{1}{2}Cu_C^2(t)+\frac{1}{2}LC^2\left(\frac{du_C(t)}{dt}\right)^2$.

b) Calculons $\frac{dE}{dt}$.

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2}C\times 2u_C(t)\frac{du_C(t)}{dt}+\frac{1}{2}LC^2\times 2\frac{du_C(t)}{dt}\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}=C\frac{du_C(t)}{dt}\left(u_C(t)+LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}\right).$$

D'après l'équation différentielle, $u_C(t)+LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}=0$, d'où $\frac{dE}{dt}=0\Rightarrow E=C^{te}$

L'oscillateur est donc non amortie.

3°)a) $E=E_{C_{max}}$, d'après la courbe $E_{C_{max}}=5.10^{-4}$ J est l'ordonnée de l'abscisse $U_C^2=100\,(V^2)$ d'où $U_{C_{max}}=10$ V.

b) $E=E_{C_{max}}=\frac{1}{2}CU_{C_{max}}^2 \Rightarrow C=\frac{2E}{U_{C_{max}}^2}$. ***AN***: $C=10^{-5}F=10\mu F$.

Remarque: La valeur de la capacité du condensateur peut être déduite graphiquement à partir de la pente de la courbe $E_C=f(u_C^2)$. En effet la pente est égale à $\frac{C}{2}$.

c) $u_C(t)=5\sqrt{2}$ V $\Rightarrow u_C^2=50\,V^2$.

D'après la courbe : Pour $u_C^2=50\,V^2$, on a : $E_C=2{,}5.10^{-4}$ J, or :

$E_L=E-E_C \Rightarrow E_L=2{,}5.10^{-4}$ J.

Remarquons que pour $u_C(t)=5\sqrt{2}$ V, on a $E_C=E_L=\frac{E}{2}$.

4°)a) $u_C(t)=U_{C_{max}}\sin(\omega_o t)$; on a: $U_{C_{max}}=10$ V et $\omega_o=\frac{1}{\sqrt{LC}}=10^3$ rad.s^{-1}

d'où : $u_C(t)=10\sin(10^3t)$ en V, t en s.

b) $q(t)=Cu_C(t) \Leftrightarrow q(t)=10^{-4}\sin(10^3t)$ en C, t en s

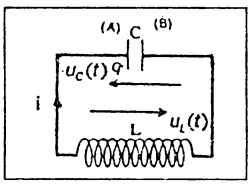
$i(t)=\dfrac{dq(t)}{dt} \Leftrightarrow i(t)=0{,}1\cos(10^3 t)=0{,}1\sin(10^3 t+\dfrac{\pi}{2})$ en A, t en s.

c) $u_C(t)$ et $q(t)$ sont en phase.

$i(t)$ est en quadrature avance de phase sur $q(t)$ et par suite sur $u_C(t)$.

Exercice n°3 :

1°) D'après la loi des mailles :



$u_C(t)+u_L(t)=0 \Rightarrow \dfrac{q(t)}{C}+L\dfrac{di(t)}{dt}=0$, or $i(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}$;

d'où: $\dfrac{q(t)}{C}+L\dfrac{d^2q(t)}{dt^2}=0.$

2°) $E=E_C+E_L=\dfrac{1}{2}\dfrac{q^2(t)}{C}+\dfrac{1}{2}Li^2(t)$.

$\dfrac{dE}{dt}=\dfrac{dq(t)}{dt}\underbrace{\left(\dfrac{q(t)}{C}+L\dfrac{d^2q(t)}{dt^2}\right)}_{0}=0 \Rightarrow E=\text{constante.}$

3°)a) Exprimons u_C^2 en fonction de i^2 : on a $q = C u_C$.

L'énergie s'écrira alors : $E=\dfrac{1}{2}Cu_C^2+\dfrac{1}{2}Li^2 \Rightarrow u_C^2=-\dfrac{L}{C}i^2+\dfrac{2E}{C}$; équation de la forme : $y = a x + b$. La courbe $u_C^2=f(i^2)$ est alors une droite affine de pente

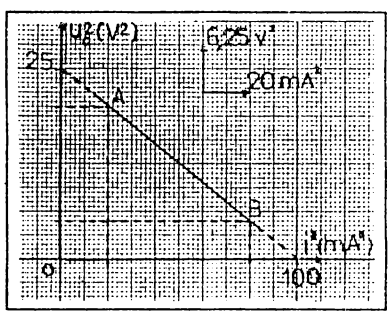
$a=-\dfrac{L}{C}<0.$

b) Calculons la pente de la droite :

$-\dfrac{L}{C}=\dfrac{5-20}{80-20}=-0{,}25\ \text{V}^2.(\text{mA})^{-2}.$

Soit $-\dfrac{L}{C}=-0{,}25.10^6\ \text{V.A}^{-2}$

d'où: $L=0{,}25\,\text{H}.$



Le terme $\dfrac{2E}{C}$ représente l'ordonnée à l'origine $\left(\text{pour } i^2=0,\ u_C^2=U_{C_m}^2=\dfrac{2E}{C}\right)$.

Cette valeur de u_C^2 est obtenue graphiquement à partir de la courbe ;

$U_{C_m}^2=25\ (\text{V}^2)$, d'où: $E=\dfrac{1}{2}CU_{C_m}^2$. ***AN***$: E=12{,}5.10^{-6}$ J.

4°) $q(t)$ est la solution de l'équation différentielle vue en 1°), de la forme :

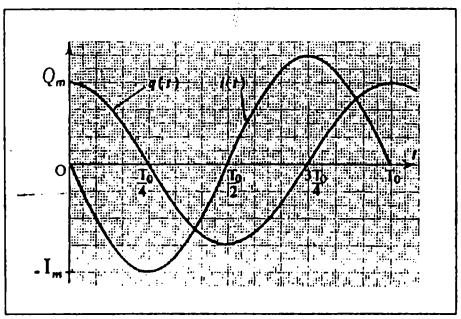
$q(t)=Q_m\sin(\omega_o t+\varphi)$ avec $\omega_o=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}=2.10^3\ \text{rad.s}^{-1}$ et $Q_m=CU_{C_m}^2=5.10^{-6}$ C.

A $t=0$: $q(t=0)=Q_m=Q_m\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi=1 \Rightarrow \varphi=+\dfrac{\pi}{2}\,\text{rad.s}^{-1}$.

D'où : $q(t) = 5.10^{-6} \sin(2.10^3 t + \frac{\pi}{2})$ en C, t en s,

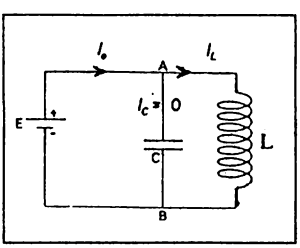
et par suite $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = 10^{-2} \sin(2.10^3 t + \pi)$ en A, t en s.

Remarque : I_m pourra être déduite à partir de la courbe, en effet, pour $u_C^2 = 0$ on a : $i^2 = I_m^2 = 100\ (\text{mA})^2 = 10^{-4}\ \text{A}^2$, d'où: $I_m = 10^{-2}$ A.



Exercice n°4 :

1°)a) La tension aux bornes d'une bobine de résistance r_b et d'inductance L est donnée par : $u(t) = r_b\, i(t) + L\frac{di(t)}{di} \cdot r_b$ étant négligeable et l'intensité du courant $i = I_o$ est constante en régime permanent, donc $u(t) = 0$ V.



b) Remarquons que la tension aux bornes de la bobine est la même que celle aux bornes du générateur (association de dipôle en parallèle). La loi d'Ohm pour un générateur s'écrit :

$u_{AB} = E - r\, I_o = 0 \Rightarrow I_o = \frac{E}{r} \cdot$ *AN*: $I_o = 2{,}5$ A.

La loi des nœuds en A s'écrit : $I_o = I_C + I_L$. En régime continu, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, donc $I_C = 0$ A et par suite $I_L = I_o = 2{,}5$ A.

c) L'énergie magnétique stockée dans la bobine est : $E_L = \frac{1}{2} L I_o^2$.

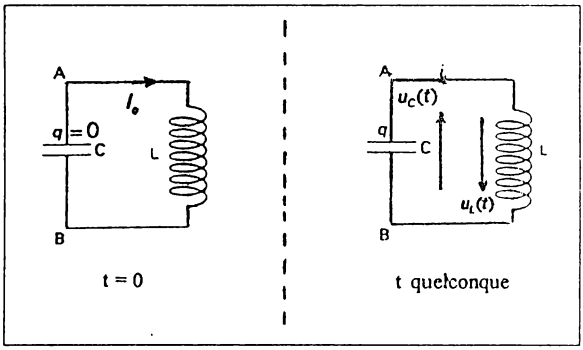
AN: $E_L = 3{,}125$ J.

L'énergie électrostatique stockée dans le condensateur est : $E_C = \frac{1}{2} C U_{AB}^2$.

AN: $E_C = 0$ J.

Remarque : La bobine de résistance nulle, court-circuite le générateur.

2°) Le circuit équivalent est alors : (figure ci-dessous) :



La loi des mailles s'écrit : $u_C(t) + u_L(t) = 0 \Rightarrow \frac{q(t)}{C} + L\frac{di(t)}{dt} = 0$

En dérivant membre à membre, on obtient :

$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}i(t) = 0$: C'est l'équation différentielle d'un oscillateur électrique harmonique libre non amorti. La solution générale de cette équation différentielle est : $i(t) = I_m \sin(\omega_o t + \varphi_i)$ avec $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 707\ \text{rad.s}^{-1}$.

Déterminons I_m et φ_i à partir des conditions initiales :

A $t = 0$, on a : $i(t=0) = -I_o = I_m \sin\varphi_i$ (1)

D'autre part : $q(t) = \int i\,dt = -\frac{I_m}{\omega_o}\cos(\omega_o t + \varphi_i)$

A $t = 0$, on a : $q(t=0) = 0 = -\frac{I_m}{\omega_o}\cos\varphi_i$ (2)

La résolution du système d'équation (1) et (2) donne : $\cos\varphi_i = 0$ et $\sin\varphi_i < 0$

D'où : $\varphi_i = -\frac{\pi}{2}$ rad et par suite $I_m = I_o$.

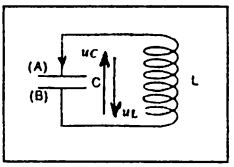
L'équation de $i(t)$ s'écrira alors : $i(t) = 2{,}5\sin(707\,t - \frac{\pi}{2})$ en A, t en s.

Exercice n°5 :

PARTIE A/ 1°) $Q_o = C\,E = 6.10^{-6}$ C.

L'énergie emmagasinée par le condensateur est sous forme électrostatique : $W = \frac{1}{2}CE^2$. ***AN*** : $W = 1{,}8.10^{-5}$ J.

2°) La loi des mailles s'écrit : $u_C(t) + u_L(t) = 0$



$\Rightarrow \frac{q(t)}{C} + L\frac{di(t)}{dt} = 0$, or $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

d'où : $\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}q(t) = 0$.

La solution générale de cette équation différentielle est de la forme :

$q(t) = q_m \sin(\omega_o t + \varphi_q)$ avec $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$, soit numériquement $\omega_o = 10^3$ rad.s^{-1}

A t = 0, on a : $q(t=0) = +Q_o = q_m \sin\varphi_q > 0$; d'autre part :

$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = q_m \omega_o \cos(\omega_o t + \varphi_q)$

A t = 0, on a : $i(t=0) = q_m\omega_o \cos\varphi_q = 0$, d'où: $\cos\varphi_q = 0$

$\Rightarrow \varphi_q = \pm\frac{\pi}{2}$ rad, or $\sin\varphi_q > 0$, donc $\varphi_q = +\frac{\pi}{2}$ rad, et par suite

$Q_o = q_m = 6.10^{-6}$ C. D'où : $q(t) = 6.10^{-6}\sin(10^3 t + \frac{\pi}{2})$ en C, t en s.

PARTIE B/

1°)a) Soit $u_{LC}(t)$ la tension instantanée aux bornes de l'ensemble (bobine – condensateur) et U_{LC} sa valeur efficace.

Le voltmètre indique la valeur de U_{LC} : U_{LC} = 0 V, et par suite, d'après la loi d'Ohm : $Z_{LC} = 0$ avec $Z_{LC} = \left| L\omega_o - \frac{1}{C\omega_o} \right|$: impédance du dipôle (bobine – condensateur).

On a alors $L\omega_o = \frac{1}{C\omega_o}$ (ou $LC\omega_o^2 = 1$) : C'est l'état de résonance d'intensité.

$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. ***AN***: f_o = 159 Hz.

b) $U_{LC} = 0 \Rightarrow u_{LC}(t) = 0 \Rightarrow u(t) = u_R(t)$, donc $U = U_R = R I_o$,

d'où $R = \frac{U_R}{I_o}$. ***AN***: $R = 50\ \Omega$.

c) Par définition, le facteur de surtension ou de qualité est :

$Q = \left(\frac{U_C}{U}\right)_{\text{résonance}} = \left(\frac{U_L}{U}\right)_{\text{résonance}}$, $Q = \frac{1}{RC\omega_o} = \frac{L\omega_o}{R} = \frac{2\pi L f_o}{R}$. ***AN***: $Q = 20$.

2°)a) La loi des mailles pour le circuit (R, L, C) s'écrit :

$u(t) = u_L(t) + u_C(t) + u_R(t)$

$\Rightarrow u(t) = L\frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} + R\,i(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}$.

b) $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = I\sqrt{2}\sin(2\pi f_1 t)$ et $R\,i(t) = RI\sqrt{2}\sin(2\pi f_1 t) = u_R(t)$

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} = L\frac{di(t)}{dt} = LI \times 2\pi f_1 \sqrt{2}\, sin(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{2}) = u_L(t)$$

$$\frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int i(t)dt = \frac{I\sqrt{2}}{2\pi f_1 C} sin(2\pi f_1 t - \frac{\pi}{2}) = u_C(t)$$

L'équation différentielle précédente s'écrira :

$$u(t) = 2\pi f_1 LI\sqrt{2}\, sin(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{2}) + RI\sqrt{2}\, sin(2\pi f_1 t) + \frac{I\sqrt{2}}{2\pi f_1 C} sin(2\pi f_1 t - \frac{\pi}{2}).$$

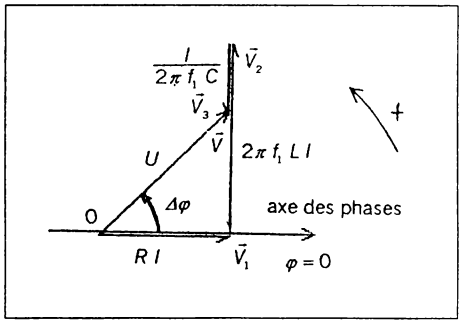
Remarquons que $u(t)$ est la somme de trois tensions sinusoïdales synchrones.

Appelons $\vec{V}, \vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ les vecteurs de Fresnel associés respectivement aux quatres tensions $u(t)$, $u_R(t)$, $u_L(t)$ et $u_C(t)$. Les caractéristiques de ces vecteurs sont : $\vec{V}(U;\varphi)$, $\vec{V}_1(RI;0)$, $\vec{V}_2(2\pi f_1 LI;+\frac{\pi}{2})$, $\vec{V}_3(\frac{I}{2\pi f_1 C};-\frac{\pi}{2})$.

Comparons d'abord $\|\vec{V}_2\|$ et $\|\vec{V}_3\|$, on a : $2\pi f_1 L \approx 1017\,\Omega$ et $\frac{1}{2\pi f_1 C} \approx 982\,\Omega$.

On remarque alors que $2\pi f_1 L > \frac{1}{2\pi f_1 C}$, donc $\|\vec{V}_2\| > \|\vec{V}_3\|$:

Le circuit (*R*, *L*, *C*) est à caractère inductif.
Construction de Fresnel :



$\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi - 0 = \varphi$. On sait que: $tg\varphi = \dfrac{\left(2\pi f_1 L - \frac{1}{2\pi f_1 C}\right)}{R}$.

AN: $tg\varphi = 0{,}7$; d'où: $\varphi = 0{,}61\,\text{rad}\ (\approx 35°)$

pour $f = f_1$, on a : $I = I_1$; $cos\varphi = \frac{RI_1}{U}$, d'où: $I_1 = \frac{U cos\varphi}{R}$. ***AN***: $I_1 = 1{,}64$ A.

c) La puissance moyenne consommée dans le circuit est : $P = RI_1^2$.

AN: $P = 134{,}5$ W.

Exercice n°6 :

PARTIE A/

1°) La charge maximale portée par la plaque (A) est donnée par la relation :

$Q_o = CU_{AB} = CE$. ***AN***: $Q_o = 10^{-5}$ C.

L'énergie emmagasinée par le condensateur est : $W_o = \frac{1}{2}CE^2$.

AN: $W_o = 5.10^{-5}$ J.

2°)a) Si $r = 0$, l'équation différentielle devient : $\frac{d^2u_{AB}(t)}{dt^2} + \omega_o^2 u_{AB}(t) = 0$.

b) D'après la courbe : $5T = \pi.10^{-3}$ s, d'où : $T = \frac{\pi}{5}.10^{-3}$ s = $6{,}28.10^{-4}$ s.

c) $T = T_o = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow L = \frac{T_o^2}{4\pi^2 C}$. ***AN***: $L = 10^{-2}$ H.

d) L'énergie perdue par effet Joule est :

$\Delta W = W(t = \pi.10^{-3}) - W(t = 0) = W' - W_o$; or l'énergie électrique à ces instants est purement sous forme électrostatique dans le condensateur :

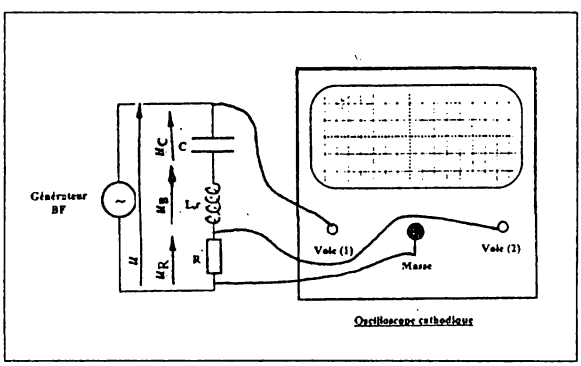
$W = W_{C_{max}} = \frac{1}{2}CU_{max}^2$,en effet à ces instants $u_{AB} = U_{AB_{max}}$, donc $q = Q_{max}$;

d'où $i = 0$ et par suite ; $W_L = 0$. $\Delta W = \frac{1}{2}C\left(U_{max}'^2 - U_{o_{max}}^2\right)$ avec $U_{o_{max}} = E$.

AN: $\Delta W = \frac{1}{2}.10^{-6}\left[(4{,}56)^2 - (10)^2\right] = -3{,}96.10^{-5}$ J.

PARTIE B/

1°) Schéma :



2°) La loi des tensions s'écrit :

$u(t) = u_R(t) + u_{r,L}(t) + u_C(t)$ avec $u_{r,L} = u_B$

$= Ri(t) + ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$

$= (R + r)i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$

3°)a) ***Expérience n°1*** :

α) D'après les diagrammes de la figure-4, on constate que $u(t)$ et $u_R(t)$ sont en phase et par suite, $u(t)$ et $i(t)$ le sont aussi : $\varphi_u = \varphi_i$, c'est l'état de résonance d'intensité.

$U_m = (R+r)\,I_m$ et $U_{R_m} = R\,I_m$

$U_m > U_{R_m}$: Le signal ayant la plus grande amplitude correspond à $u(t)$.

β) $\dfrac{U_{R_m}}{U_m} = \dfrac{R\,I_m}{(R+r)\,I_m} = \dfrac{R}{(R+r)}$ (1)

Or d'après les diagrammes de la figure-4 : $U_{R_m} = 3$ V et $U_m = 4{,}5$ V,

d'où : $\dfrac{U_{R_m}}{U_m} = \dfrac{3}{4{,}5} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{R}{R+r}$.

b) ***Expérience n°2*** :

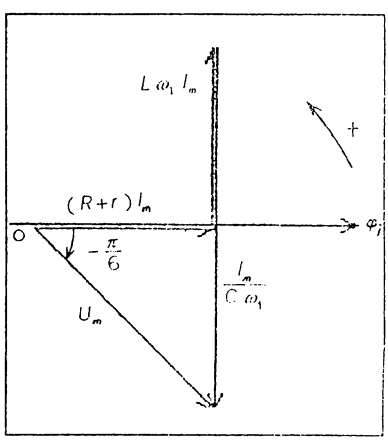
α) $\varphi_u - \varphi_i = -\dfrac{\pi}{6}$ rad, or $tg(\varphi_u - \varphi_i) = \dfrac{L\omega_1 - \dfrac{1}{C\omega_1}}{R+r} < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{C\omega_1} > L\omega_1$:

Le circuit est alors à caractère capacitif.

Remarque :

On pourra retrouver cette réponse en comparant f_1 à $f_o = 1592{,}3$ Hz :

$f_1 < f_o$ le circuit est à caractère capacitif.



β) En exploitant la construction de Fresnel, il vient : $tg\Delta\varphi = tg(-\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{L\omega_1 - \dfrac{1}{C\omega_1}}{R+r} \Rightarrow$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi L f_1 - \dfrac{1}{2\pi C f_1}}{R+r}.$$

D'où : $R + r = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2\pi C f_1} - 2\pi L f_1\right)$ (2)

γ) D'après les relations (1) et (2) on a :

$R = \dfrac{2}{3}(R+r) = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2\pi C f_1} - 2\pi L f_1\right)$. ***AN*** : $R = 10\ \Omega$.

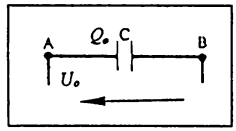
En remplaçant dans (1), on obtient : $r = 5\ \Omega$.

c) Le facteur de qualité de l'oscillateur est donné par la relation :

$Q = \dfrac{2\pi L f_o}{R+r} = \dfrac{1}{2\pi C (R+r) f_o}$. ***AN*** : $Q = 6{,}7$.

Exercice n°7 :

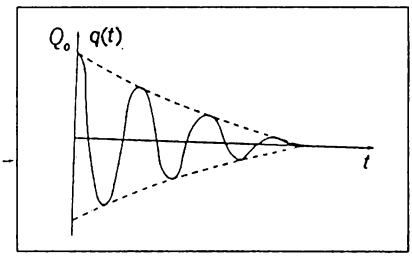
PARTIE A/



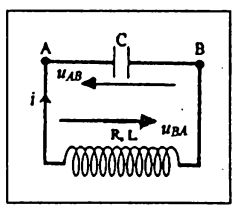
1°) La charge Q_o prise par l'armature (A) du condensateur est : $Q_o = CU_o$ · ***AN***: $Q_o = 25.10^{-4}$ C.

2°)a) $T \approx T_o = 2\sqrt{LC}$. ***AN***: $T \approx 1{,}57.10^{-2}$ s.

b) Si l'instant t = 0 est choisi comme étant l'instant de branchement du condensateur chargé, aux bornes de la bobine, la courbe $q(t)$ serait :



3°)a) La loi des mailles s'écrit :



$$u_{AB}(t) + u_{BA}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{q(t)}{C} + R\frac{dq(t)}{dt} + L\frac{d^2q(t)}{dt^2} = 0$$

b) L'énergie totale de l'oscillateur est :

$$E = E_e + E_m = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C} + \frac{1}{2}Li^2(t)$$

Dérivons membre à membre, on obtient : $\frac{dE}{dt} = \frac{q(t)}{C}\frac{dq(t)}{dt} + Li(t)\frac{di(t)}{dt}$,

or $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$; d'où: $\frac{dE}{dt} = i(t)\left(\frac{q(t)}{C} + L\frac{d^2q(t)}{dt^2}\right)$.

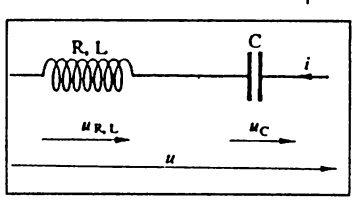
En tenant compte de l'équation différentielle, on aura : $\frac{dE}{dt} = -Ri^2(t)$.

$\frac{dE}{dt} < 0 \Rightarrow E(t)$ est décroissante ; cette diminution est due à une perte d'énergie par effet Joule.

D'autre part, l'énergie étant proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations, cette amplitude est donc une fonction décroissante du temps.

PARTIE B/

1°) Loi des mailles :



$$u(t) = u_{R,L}(t) + u_C(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$= R\frac{dq(t)}{dt} + L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C}.$$

2°) L'énergie totale de l'oscillateur $E(t)$ garde la même expression :

$E(t)=\frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}+\frac{1}{2}Li^2(t)$, sa dérivée est : $\frac{dE(t)}{dt}=i(t)\left(\frac{q(t)}{C}+L\frac{d^2q(t)}{dt^2}\right)$.

En tenant compte de l'équation différentielle, il vient :

$\frac{dE(t)}{dt}=i(t)[\,u(t)-Ri(t)\,]=u(t)i(t)-Ri^2(t)$.

A la résonance d'intensité : $u(t)=Ri(t) \Rightarrow \frac{dE(t)}{dt}=Ri^2(t)-Ri^2(t)=0$

$\Rightarrow E(t)=C^{te}$.

$E=E_{m_{max}}=\frac{1}{2}LI_{max}^2$, or $I_{max}=\frac{U_{max}}{R}$, d'où: $E=\frac{1}{2}\frac{LU_{max}^2}{R^2}$.

AN: $E=\frac{1}{2}\frac{0{,}25\times(6)^2}{(10)^2}=4{,}5.10^{-2}$ J.

3°) A la résonance d'intensité, on peut écrire :

$i(t)=\frac{u(t)}{R}=\frac{U_{max}}{R}sin(2\pi Nt)$; avec $N=N_o=\frac{2\pi}{T_o}$.

Or $q(t)=\int i(t)dt=-\frac{U_{max}}{2\pi N_oR}cos(2\pi N_ot)=\frac{U_{max}}{2\pi N_oR}sin(2\pi N_ot-\frac{\pi}{2})$

AN: $N_o=63{,}7$ Hz ; $Q_m=\frac{U_{max}}{2\pi N_oR}=1{,}5.10^{-3}$ C,

d'où: $q(t)=1{,}5.10^{-3}\,sin(400t-\frac{\pi}{2})$ en C, t en s.

Exercice n°8 :

1°)a) Les courbes $u_{AB}(t)$ et $u_{AD}(t)$ correspondent à deux tensions électriques synchrones et en phase. D'autre part ; $u_{AB}(t)$ = $u_R(t)=Ri(t)$ et par suite $u_{AB}(t)$ et $i(t)$ sont en phase. $u_{AD}(t)$(tension aux bornes du générateur) et $i(t)$ sont alors en phase, $\varphi_{u_{AD}}=\varphi_i$: c'est l'état de résonance d'intensité.

b) A la résonance d'intensité, on a : $f=f_o$.

D'après les oscillogrammes, la période vaut : $T_o=10\times0{,}5\times10^{-3}=5.10^{-3}$ s ;

d'où : $f_o=\frac{1}{T_o}=200$ Hz.

c) $U_{AB_m}=RI_m$ et $U_{AD_m}=ZI_m$ avec $Z=R+r$ à la résonance d'intensité.

$U_{AD_m}>U_{AB_m}$, d'où l'oscillogramme (1) correspond à $u_{AB}(t)$ car son amplitude est la plus petite.

$\frac{U_{AD_m}}{U_{AB_m}}=\frac{R+r}{R}=1+\frac{r}{R} \Leftrightarrow r=R\left(\frac{U_{AD_m}}{U_{AB_m}}-1\right)$. ***AN***: $r=0{,}5\ \Omega$

d) $U_{AB_m} = R I_m = R I_o \sqrt{2}$, d'où: $I_o = \dfrac{U_{AB_m}}{R\sqrt{2}}$. ***AN***: $I_o = 0{,}8$ A

2°)a) $Q = \dfrac{2\pi f_o L}{R+r} = \dfrac{1}{2\pi f_o C}$ d'où: $L = \dfrac{(R+r)Q}{2\pi f_o}$ et $C = \dfrac{1}{2\pi f_o Q(R+r)}$.

AN: $L = 0{,}1$ H et $C = 6{,}36$ μF.

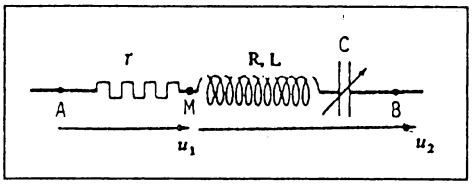
b) $P_o = (R+r) I_o^2$. ***AN***: $P_o = 1{,}6$ W.

Exercice n°9 :

1°) La puissance moyenne consommée par ce circuit est :

$P = (R+r) I^2$, d'où: $I = \sqrt{\dfrac{P}{R+r}}$;

AN: $I = 0{,}5$ A.



2°)a) $U_1 = U_R$ et $U_2 = U_{BM}$.

On a : $U_1 = U_2 \Leftrightarrow Z_1 = Z_2$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$.

Elevons les deux membres de l'équation au carré, on obtient :

$r^2 = R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2$, d'où: $L\omega - \dfrac{1}{C\omega} = \pm\sqrt{r^2 - R^2}$.

D'autre part : $tg\Delta\varphi = \dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R+r} = \pm\dfrac{\sqrt{r^2-R^2}}{R+r} = \pm\sqrt{\dfrac{r-R}{r+R}}$ $(\Delta\varphi = \varphi_{u_{AB}} - \varphi_i)$.

AN: $tg\Delta\varphi = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \Delta\varphi = \pm\dfrac{\pi}{6}$ rad.

b) $\cos\Delta\varphi = \dfrac{R+r}{Z_{AB}} \Leftrightarrow Z_{AB} = \dfrac{R+r}{\cos\Delta\varphi}$; $U_{AB} = Z_{AB} I = \dfrac{(R+r)}{\cos\Delta\varphi} I$.

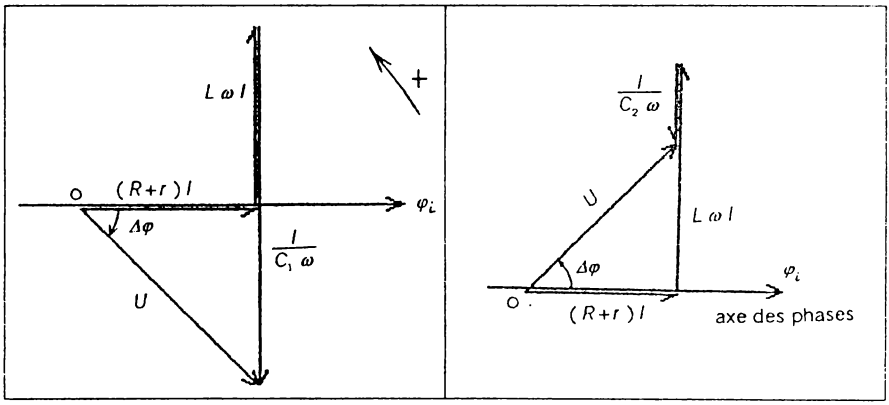
AN: $U_{AB} = 34{,}6$ V.

c) $L\omega - \dfrac{1}{C\omega} = \pm\sqrt{r^2 - R^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{C\omega} = L\omega \pm \sqrt{r^2 - R^2}$.

Soient : $C_1 = \dfrac{1}{L\omega^2 + \omega\sqrt{r^2-R^2}}$. ***AN***: $C_1 = 16{,}6$ μF.

$C_2 = \dfrac{1}{L\omega^2 - \omega\sqrt{r^2-R^2}}$. ***AN***: $C_2 = 26$ μF.

Les constructions de Fresnel correspondantes :



* Pour $C_1 = 16{,}6\,\mu F$, on a : $L\omega < \frac{1}{C_1\omega}$: le circuit est capacitif et par suite, $u_{AB}(t)$ est en retard de phase sur $i(t)$.

* Pour $C_2 = 26\,\mu F$, on a : $L\omega > \frac{1}{C_2\omega}$: le circuit est inductif et par suite, $u_{AB}(t)$ est en avance de phase sur $i(t)$.

Exercice n°10 :

1°)a) D'après les oscillogrammes, on a : $T = 8 \times 25 \times 10^{-4} = 2.10^{-2}$ s,

d'où : $N = \frac{1}{T} =$ 50 Hz.

b) La tension $v_{AM}(t)$ aux bornes du résistor est en phase avec l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit. D'autre part, d'après les courbes observées, $v_{AM}(t)$ est en retard de phase sur $v_{AB}(t)$, donc $i(t)$ est en retard de phase sur $v_{AB}(t)$.

Soit θ le décalage horaire entre $i(t)$ et $v_{AB}(t)$: $\theta = \frac{T}{8}$ d'après les oscillogrammes, $|\Delta\varphi| = \omega \cdot \theta = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{8} = \frac{\pi}{4}$ rad. Par ailleurs, $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_{v_{AB}} < 0$,

d'où : $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{4}$ rad.

2°)a) $v_{AB}(t) = V_{AB_m} \sin(\omega t + \varphi_{v_{AB}})$

D'après l'oscillogramme correspondant à $v_{AB}(t)$: $V_{AB_m} = 40$ V.

A $t = 0$: $v_{AB}(t=0) = V_{AB_m} \sin\varphi_{v_{AB}} = 0$, avec $\left(\frac{dv_{AB}(t)}{dt}\right)_{t=0} > 0 \Leftrightarrow \cos\varphi_{v_{AB}} > 0$,

d'où : $\varphi_{v_{AB}} = 0$ rad.

$v_{AB}(t) = 40\sin(100\pi t)$ en V, t en s.

$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ avec $I_m = \frac{V_{AM_m}}{R} = 1{,}25$ A et $\varphi_i = \Delta\varphi + \varphi_{v_{AB}} = -\frac{\pi}{4}$ rad.

D'où : $i(t) = 1{,}25\sin(100\pi t - \frac{\pi}{4})$ en A, t en s.

b) D'après la loi d'Ohm : $Z_{AB} = \frac{V_{AB_m}}{I_m}$. **AN** : $Z_{AB} = 32\ \Omega$

c) $\cos\Delta\varphi = \frac{R+r}{Z_{AB}}$; donc $r = Z_{AB}\cos\Delta\varphi - R$. **AN** : $r = 2{,}63\ \Omega$.

$$tg\Delta\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R+r} \Leftrightarrow L = -\left(\frac{R+r}{\omega}\right)tg\Delta\varphi + \frac{1}{C\omega^2}.$$ **AN** : $L = 0{,}57$ H

3°) A la résonance d'intensité, I est maximale.

On a alors : $LC_o\omega^2 = 1 \Leftrightarrow C_o = \frac{1}{L\omega^2}$. **AN** : $C_o = 17{,}77\ \mu$F.

$I_o = \frac{V_{AB_m}}{\sqrt{2}(R+r)}$. **AN** : $I_o = 1{,}25$ A.

$v_{AB}(t) = 40\sin(100\pi t)$ en V, t en s ;

et $i(t) = 1{,}25\sqrt{2}\sin(100\pi t)$ en A, t en s ($\varphi_i = \varphi_{v_{AB}}$ à la résonance d'intensité)

Exercice n°11 :

PARTIE A/

1°)a) L'état de résonance d'intensité est défini par une intensité efficace maximale du courant traversant le résonateur et ceci pour une fréquence de l'excitateur égale à la fréquence propre du résonateur.

D'après la courbe $I = f(N)$, le maximum est obtenu pour $N_R = N_o = 80$ Hz ;

$I_o = 480$ mA.

D'autre part d'après la courbe $\varphi = f(N)$, pour $N = N_R$, $\varphi_o = 0$ rad.

b) $i(t) = I\sqrt{2}\sin(2\pi Nt + \varphi_i)$

A la résonance d'intensité :

$I = I_o$, $N = N_o$; $\varphi_o = \varphi_i - \varphi_u = 0$ rad et $\varphi_u = 0 \Rightarrow \varphi_i = \varphi_u = 0$ rad.

Numériquement : $i(t) = 480\sqrt{2}\sin(160\pi t)$ en mA, t en s.

c) A la résonance d'intensité : $Z = R = \frac{U}{I_o}$. **AN** : $R = 50\ \Omega$.

2°)a) Graphiquement, pour $N = 40$ Hz, on a : $I = 150$ mA et $\varphi = 1{,}25$ rad.

b) Numériquement : $i(t) = 150\sqrt{2}\sin(80\pi t + 1{,}25)$ en mA, t en s.

3°) D'après la courbe $\varphi = f(N)$:

* Pour $N < N_o$; $\varphi = \varphi_i - \varphi_u > 0$, donc $i(t)$ est en avance de phase sur $u(t)$.

* Pour $N > N_0$; $\varphi = \varphi_i - \varphi_u < 0$, donc $i(t)$ est en retard de phase sur $u(t)$.

PARTIE B/

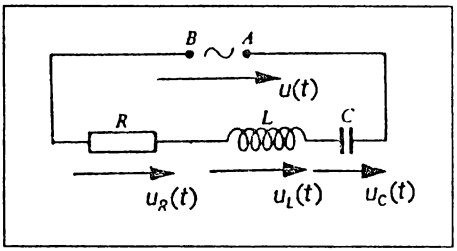
1°) Appliquons la loi des tensions :

$$u(t) = u_L(t) + u_R(t) + u_C(t)$$

$$= L\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t) + \frac{q(t)}{C}$$

$$= L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}$$

$$= U_m \sin(\omega t)$$



2°) $\dfrac{q(t)}{C} = \dfrac{Q_m}{C}\sin(\omega t + \varphi')$

$$R\frac{dq(t)}{dt} = R\,\omega Q_m \sin\left(\omega t + \varphi' + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad L\frac{d^2q(t)}{dt^2} = L\,\omega^2 Q_m \sin(\omega t + \varphi' + \pi).$$

A chacune de ces grandeurs sinusoïdales, on associe respectivement les vecteurs de Fresnel suivants :

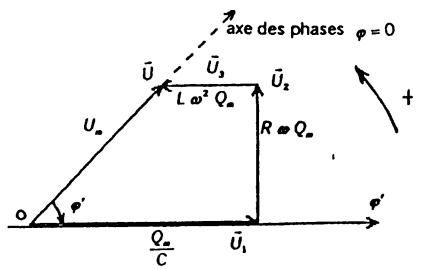
$$\vec{U}_1\left(\frac{Q_m}{C}\,;\varphi'\right),\quad \vec{U}_2\left(R\,\omega Q_m\,;\varphi' + \frac{\pi}{2}\right),\quad \vec{U}_3\left(L\,\omega^2 Q_m\,;\varphi' + \pi\right)$$

Soit, $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3$: le vecteur de Fresnel associé à $u(t)$; $\vec{U}(U_m\,;0)$

Les constructions de Fresnel correspondant aux deux cas sont alors :

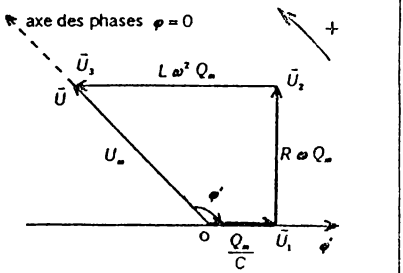
1er Cas : Circuit capacitif

$$\frac{1}{C\omega} > L\omega$$



2ème Cas : Circuit inductif

$$L\omega > \frac{1}{C\omega}$$



D'après les constructions de Fresnel, on constate que $\varphi_q - \varphi_u = \varphi'$ est toujours négatif, par conséquent $q(t)$ est toujours en retard de phase par rapport à $u(t)$.

3°) D'après l'analogie électro-mécanique :

$q \leftrightarrow x$: élongation ; $u \leftrightarrow F$: force excitatrice.

La grandeur x (grandeur décrivant le résonateur) vibre toujours en retard de phase sur F (grandeur décrivant l'excitateur).

Exercice n°12 :

1°)a) La puissance moyenne consommée par un dipôle quelconque est: $P = UI\cos(\varphi_u - \varphi_i)$.

*) Pour le résistor : $\varphi_u - \varphi_i = 0$ et $U_1 = R_1 I \Rightarrow P_1 = R_1 I^2$.

*) Pour la bobine (R_2, L) :

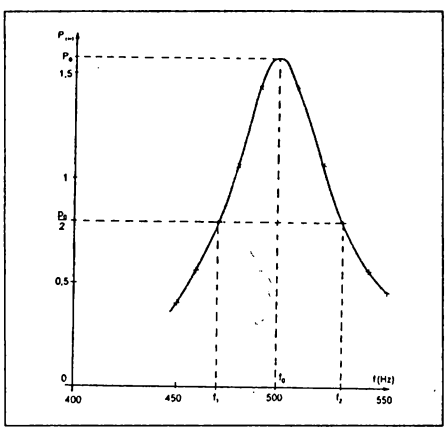
$U_B = Z_B I$ et $\cos(\varphi_{u_B} - \varphi_i) = \dfrac{R_2}{Z_B}$, d'où : $P_2 = R_2 I^2$.

*) Pour le condensateur : $\varphi_{u_C} - \varphi_i = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow P_3 = 0$

b) $P = P_1 + P_2 + P_3 = (R_1 + R_2) I^2$.

La puissance consommée par le dipôle (R, L, C) est entièrement dissipée par effet Joule dans R_1 et R_2.

2°)a)



b) D'après la courbe, $P_o = P_{max} = 1{,}56$ W correspond à $f_o = 500$ Hz.

A la valeur P_{max} correspond une intensité de courant efficace maximale I_o : C'est l'état de résonance d'intensité ou de puissance.

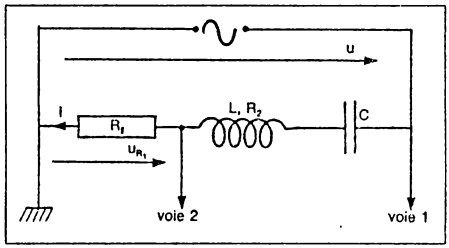
3°) $P_o = (R_1 + R_2) I_o^2$ et $U = (R_1 + R_2) I_o$.

En éliminant I_o, on obtient : $R_1 + R_2 = \dfrac{U^2}{P_o}$, d'où : $R_2 = \dfrac{U^2}{P_o} - R_1$ · ***AN***: $R_2 = 3{,}52\ \Omega$

$Q = \dfrac{L\omega_o}{R_1 + R_2} = \dfrac{2\pi f_o L}{R_1 + R_2} \Rightarrow L = \dfrac{(R_1 + R_2)Q}{2\pi f_o}$ · ***AN***: $L = 1{,}3.10^{-2}$ H

$LC\omega_o^2 = 1 \Rightarrow C = \dfrac{1}{4\pi^2 f_o^2 L}$ · ***AN***: C = 7,7 μF

4°)a)



b) La période T de la tension aux bornes du générateur observé à l'oscillographe correspond à 10 divisions ; la sensibilité de la base de temps est s = 0,2 ms/div, d'où : $T = 10 \times 0{,}2 \times 10^{-3} = 2.10^{-3}\,s \Rightarrow f = 500$ Hz.

c) $f = f_o$; donc il s'agit d'une résonance d'intensité.

$u_{R_1}(t) = R_1\, i(t) = R_1\, I_m \sin(2\pi f_o t + \varphi_i)$.

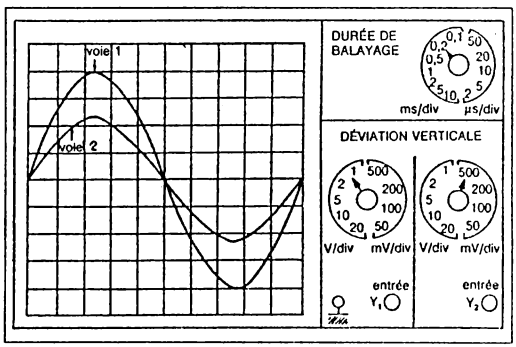
A la résonance d'intensité, $u(t)$ *et* $i(t)$ sont en phase :

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad I_m = \frac{U_{m_{R_1}}}{R_1}, \quad \text{d'où :} \quad U_{m_{R_1}} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) U_m .$$

AN : $U_{m_{R_1}} = 1{,}18$ V.

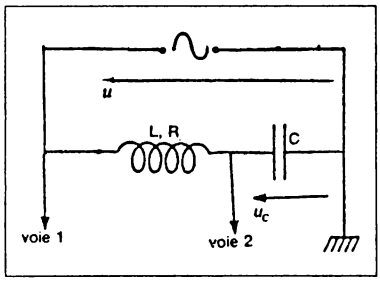
La sensibilité sur la voie (2) étant de 500 mV/div, d'où l'amplitude $U_{m_{R_1}}$ sera représentée par : $\dfrac{1{,}18\ \text{V}}{500.10^{-3}\ \text{V/div}} \approx 2{,}4$ div.

On observe donc à l'écran de l'oscillographe, une sinusoïde en phase avec celle obtenue sur la voie (1) d'amplitude 2,4 div.



Exercice n°13 :

1°)



2°) D'après les oscillogrammes :

$U_m = 3\,V$; $U_{C_m} \approx 68\,V$; $T_o = 10^{-2}\,s$; $f_o = \frac{1}{T_o} = 100Hz$

$|\Delta\varphi_1| = \frac{2\pi}{T_o}\theta$ avec $\theta = 1{,}25 \times 2 \times 10^{-3} = 2{,}5.10^{-3}\,s = \frac{T_o}{4}$, d'où: $|\Delta\varphi_1| = \frac{\pi}{2}$ rad.

D'autre part, on constate que $u_C(t)$ est en retard de phase sur $u(t)$ donc :

$\Delta\varphi_1 = \varphi_{u_C} - \varphi_u = -\frac{\pi}{2}$ rad

3°) $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \underbrace{\varphi_u - \varphi_{u_C}}_{+\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\varphi_{u_C} - \varphi_i}_{-\frac{\pi}{2}} = 0$

$u(t)$ et $i(t)$ sont en phase, le résonateur (R, L, C) est alors en état de résonance d'intensité.

$L\omega_o = \frac{1}{C\omega_o}$; d'où: $L = \frac{1}{C\omega_o^2} = \frac{1}{4\pi^2 f_o^2 C}$. ***AN***: $L = 0{,}5$ H

4°) $Q = \left(\frac{U_C}{U}\right)_{résonance} = \left(\frac{U_{C_m}}{U_m}\right)_{résonance}$ ***AN***: $Q \approx 22{,}7$

5°) $Q = \frac{1}{RC\omega_o} \Rightarrow R = \frac{1}{2\pi f_o QC}$. ***AN***: $R \approx 14\,\Omega$

$i(t) = I_m \sin(2\pi f_o t + \varphi_i)$; $I_m = \frac{U_m}{R} = 0{,}214$ A et $\varphi_i = \varphi_u = +\frac{\pi}{2}$ rad.

D'où : $i(t) \approx 0{,}21 \sin(200\pi t + \frac{\pi}{2})$ en A, t en s.

6°) $W_o = W_C + W_L = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C} + \frac{1}{2}Li^2(t) = \frac{1}{2}\frac{I_m^2}{C\omega_o^2}\cos^2(\omega_o t + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}LI_m^2 \sin^2(\omega_o t + \frac{\pi}{2})$

A la résonance : $LC\omega_o^2 = 1 \Leftrightarrow \omega_o^2 = \frac{1}{LC}$.

D'où : $W_o = \frac{1}{2}LI_m^2\left[\cos^2(\omega_o t + \frac{\pi}{2}) + \sin^2(\omega_o t + \frac{\pi}{2})\right] = \frac{1}{2}LI_m^2 = \text{constante}$.

7°) La puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le circuit est : $P = RI^2 = \frac{W_1}{T_o}$, d'où : $W_1 = RI^2 T_o = \frac{1}{2}RI_m^2 T_o$. ***AN*** : $W_1 = 3{,}2.10^{-3}$ J

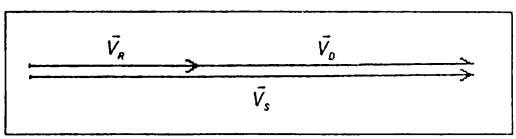
$\frac{W_o}{W_1} = \frac{\frac{1}{2}LI_m^2}{\frac{1}{2}RI_m^2 T_o}$, après simplification, il vient :

$\frac{W_o}{W_1} = \frac{L}{RT_o} = \frac{L\omega_o}{2\pi R}$, soit : $\frac{W_o}{W_1} = \frac{Q}{2\pi}$

Interprétation énergétique du facteur de qualité : Le facteur de qualité d'un circuit (*R,L,C*) représente le rapport à la résonance, de l'énergie emmagasinée à l'énergie dissipée par effet Joule, par période, dans le circuit ; et ceci à un coefficient multiplicatif prés égal à 2π.

Exercice n°14 :

1°)a) On constate que $U_S = U_D + U_R$ donc les trois tensions instantanées $u_S(t)$, $u_D(t)$ et $u_R(t)$ sont en phase : en effet les trois vecteurs de Fresnel $\vec{V}_S$, $\vec{V}_D$ et $\vec{V}_R$ associés respectivement à ces tensions sont colinéaires et de même sens.



En particulier on a : $u_S(t)$ est en phase avec $u_R(t)$ donc avec $i(t)$: intensité du courant dans le circuit. Le circuit est alors en état de résonance d'intensité.

Autre méthode : $U_S = U_D + U_R \Leftrightarrow \quad Z_S = Z_D + Z_R \Leftrightarrow \quad Z_S^2 = Z_D^2 + Z_R^2 + 2Z_D Z_R$

$\Leftrightarrow \quad (R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 + R^2 + 2R\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

Après simplification : $r = \sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$;

d'où : $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$: C'est l'état de résonance d'intensité.

NB: Cette question met en évidence l'importance de la construction de Fresnel qui rend la résolution de ce genre de question nettement plus facile.

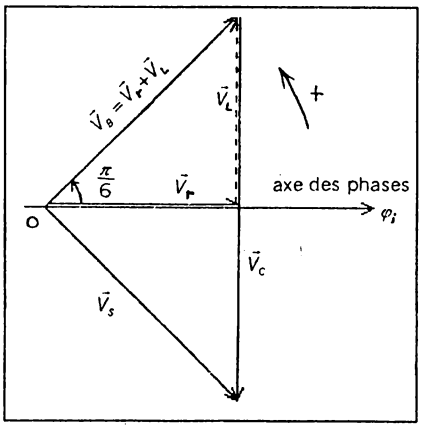
b) $U_D = rI$; $U_R = RI$; $\frac{U_D}{U_R} = \frac{r}{R}$ d'où : $r = R\frac{U_D}{U_R}$. ***AN*** : $r = 40\ \Omega$

2°) Utilisons de nouveau la construction de Fresnel :
Remarquons d'abord que les trois vecteurs de Fresnel associés aux trois tensions, $u_D(t)$, $u_C(t)$ et $u_B(t)$ sont de même module. De plus, on a :

$\vec{V}_S = \vec{V}_C + \vec{V}_B$ puisque $u_S(t) = u_C(t) + u_B(t)$.

La construction géométrique donne donc un triangle équilatéral de côtés :

$\left\|\vec{V}_S\right\| = \left\|\vec{V}_C\right\| = \left\|\vec{V}_B\right\|$.



Exploitation de la construction :

$$tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\left\|\vec{V}_L\right\|}{\left\|\vec{V}_r\right\|} = \frac{L\omega_o}{r}, \text{ d'où : } L = \frac{r \cdot tg\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2\pi f_o}.$$

AN : $L = 3{,}68.10^{-2}$ H

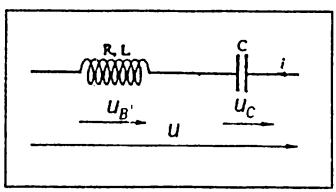
$$\left\|\vec{V}_C\right\| = 2\left\|\vec{V}_L\right\| \Leftrightarrow \frac{1}{C\omega_o} = 2L\omega_o ;$$

d'où : $C = \frac{1}{2L\omega_o^2} = \frac{1}{8\pi^2 f_o^2 L}$.

AN : $C = 34{,}4\ \mu F$.

Exercice n°15 :

1°) D'après la loi des mailles : $u(t) = u_B(t) + u_C(t)$.



Soient : $\vec{U}$, $\vec{U}_B$, $\vec{U}_C$ les vecteurs de Fresnel associés respectivement aux tensions $u(t)$, $u_B(t)$, $u_C(t)$.

Les caractéristiques de chacun de ces vecteurs sont :

$\vec{U} : \left(\left\|\vec{U}\right\| = 14{,}1\text{ cm} ; \varphi = +\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right)$,

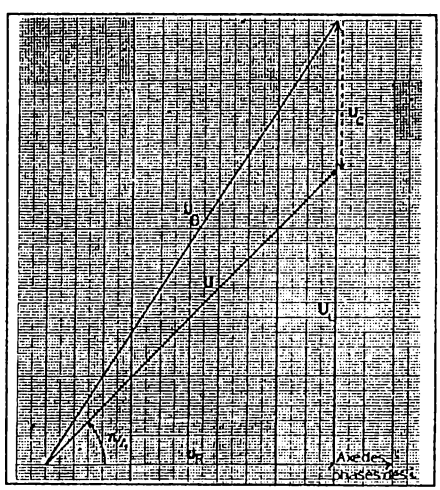
$\vec{U}_B : \left(\left\|\vec{U}_B\right\| ; \varphi_B\right)$,

$\vec{U}_C : \left(\left\|\vec{U}_C\right\| = 5{,}0\text{ cm} ; \varphi_C = -\frac{\pi}{2}\text{ rad}\right)$

D'autre part : $\vec{U} = \vec{U}_B + \vec{U}_C$

$\Rightarrow \vec{U}_B = \vec{U} - \vec{U}_C$.

La construction de Fresnel donne :



2°)a) L'exploitation de la construction de Fresnel donne :
$\left\|\vec{U}_B\right\| = 18\,\text{cm}$, d'où : $U_B = 180\,\text{V}$.

b) La bobine est équivalente à une association en série d'un résistor de résistance R et d'une bobine purement inductive d'inductance L.
$u_B(t) = u_L(t) + u_R(t)$.
Les vecteurs de Fresnel associés sont respectivement :
$\vec{U}_B : \left(\left\|\vec{U}_B\right\| ; \varphi_B\right)$, $\vec{U}_L : \left(L\omega I ; +\frac{\pi}{2}\right)$, $\vec{U}_R : (RI ; 0)$ avec $\vec{U}_B = \vec{U}_L + \vec{U}_R$

D'après la construction graphique : $\left\|\vec{U}_R\right\| = 10\,\text{cm}$; soit : $U_R = 100\,\text{V}$

et $\left\|\vec{U}_L\right\| = 15\,\text{cm}$; soit : $U_L = 150\,\text{V}$

D'après la loi d'Ohm : $U_R = RI$ d'où : $R = \frac{U_R}{I}$. ***AN*** : $R = 100\ \Omega$

$U_L = L\omega I$ d'où : $L = \frac{U_L}{I\omega}$ avec $\omega = 314\,\text{rad.s}^{-1}$ ***AN*** : $L = 0{,}48\,\text{H}$

Exercice n°16 :

1°) La loi d'Ohm pour un résistor s'écrit : $I = \frac{U_r}{r}$. ***AN*** : $I = 1{,}2\,\text{A}$.

2°) Soient $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OB}$ les vecteurs de Fresnel associés respectivement aux tensions $u_r(t), u_D(t)$ et $u(t)$.

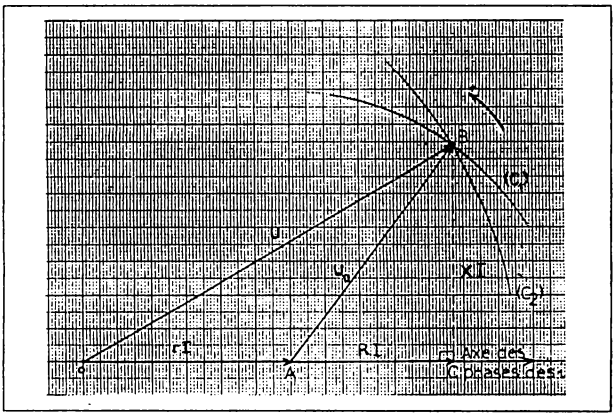
La loi des tensions s'écrit : $u(t) = u_r(t) + u_D(t)$, donc : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$.
Les caractéristiques des vecteurs de Fresnel sont :

$\overrightarrow{OB} : \left(\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = 12{,}5\,\text{cm} ; \varphi\right)$, $\overrightarrow{OA} : \left(\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = 6\,\text{cm} ; \varphi_i = 0\right)$, $\overrightarrow{AB} : \left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 8\,\text{cm} ; \varphi_D\right)$

La construction de Fresnel se fait selon la procédure suivante :
Traçons : - le vecteur $\overrightarrow{OA}$.

- le cercle (C_1) de centre O et de rayon $\left\|\overrightarrow{OB}\right\|$.
- le cercle (C_2) de centre A et de rayon $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

L'intersection des deux cercles (C_1) et (C_2) est le point B.



3°) Exploitation du diagramme : soit C le projeté orthogonal du point B sur l'axe des phases des intensités : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. A chacun de ces vecteurs de Fresnel correspond les tensions sinusoïdales respectives :
$u_D(t) = u_R(t) + u_X(t)$ avec $u_X(t) = u_L(t) + u_C(t)$.
On mesure graphiquement :

*) $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 4{,}7\,\text{cm}$; soit : $U_R = 47\,\text{V}$

$U_R = RI$; d'où : $R = \dfrac{U_R}{I}$. ***AN*** : $R = 39{,}1\,\Omega$

*) $\left\|\overrightarrow{CB}\right\| = 6{,}4\,\text{cm}$; soit : $U_X = 64\,\text{V}$

$U_X = XI$; d'où : $X = \dfrac{U_X}{I}$. ***AN*** : $X = 53{,}3\,\Omega$

4°)a) $Z_D = \dfrac{U_D}{I}$. ***AN*** : $Z_D = 66{,}67\,\Omega$

$$\begin{cases} Z_D^2 = R^2 + X^2 \\ Z^2 = (R+r)^2 + X^2 \end{cases}$$

La résolution de ce système des deux équations aboutit à :

$R = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{Z^2 - Z_D^2}{r} - r\right)$. ***AN*** : $R = 39\,\Omega$

$X = \sqrt{Z_D^2 - R^2}$. ***AN*** : $X = 54\,\Omega$

$X = L\omega - \dfrac{1}{C\omega} \Leftrightarrow C = \dfrac{1}{2\pi N(2\pi NL - X)}$. ***AN*** : $C = 26\ \mu\text{F}$.

b) $i(t) = 1{,}2\sqrt{2}\sin(300\pi t)$ en A, t en s.

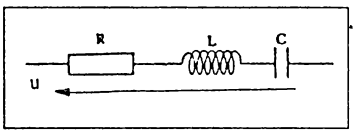
A partir du triangle OCB on a : $tg(\varphi_u - \varphi_i) = \dfrac{X}{R+r}$.

AN : $\varphi_u - \varphi_i = 0{,}54$ rad ; $\varphi_i = 0$, donc $\varphi_u = 0{,}54$ rad.

$u(t) = 125\sqrt{2}\sin(300\pi t + 0{,}54)$ en V, t en s.

Remarque : φ_u peut être déterminer graphiquement par mesure directe de l'angle $\varphi_u - \varphi_i = \varphi_u$.

Exercice n°17 :



1°) $I = I_o$: intensité efficace maximale correspondant à l'état de résonance d'intensité. Dans ce cas, l'impédance Z du circuit (R, L, C) est telle que $Z = R$.

D'après la loi d'Ohm : $R = \dfrac{U}{I_o}$. ***AN*** : $R = 50\ \Omega$

Pour $f = f_1$: $Z_1 = \dfrac{U}{I_1}$ et $Z_C = \dfrac{U_C}{I_1}$. ***AN*** : $Z_1 = 100\ \Omega$ et $Z_C = 40\ \Omega$

2°) Comparons Z_L à Z_C avec $Z_L = L\omega_1$ et $Z_C = \dfrac{1}{C\omega_1}$

$Z_1^2 = R^2 + (Z_L - Z_C)^2 \Rightarrow Z_L - Z_C = \pm\sqrt{Z_1^2 - R^2}$; soit :

$Z_L = Z_C + \sqrt{Z_1^2 - R^2}$. ***AN*** : $Z_L = 126{,}6\ \Omega$ ou

$Z_L = Z_C - \sqrt{Z_1^2 - R^2}$. ***AN*** : $Z_L = -46{,}6\ \Omega < 0$: Physiquement cette solution est à rejeter (car une impédance ne peut être négative).

Remarquons que : $Z_L > Z_C \Rightarrow L\omega_1 > \dfrac{1}{C\omega_1}$: Le circuit est inductif et par suite, $u(t)$ est en avance de phase sur $i(t)$.

3°) Pour $f = f_o$, on a : $4\pi^2 f_o^2 LC = 1$ (résonance d'intensité) (1)

Pour $f = f_1$, on a : $\begin{cases} Z_L = 2\pi f_1 L & (2) \\ Z_C = \dfrac{1}{2\pi f_1 C} & (3) \end{cases}$

$\dfrac{(2)}{(3)}$ donne : $\dfrac{Z_L}{Z_C} = 4\pi^2 f_1^2 LC$ (4)

La résolution du système d'équations (1) et (4) donne : $f_1 = f_o\sqrt{\dfrac{Z_L}{Z_C}}$.

AN : $f_1 = 71{,}2$ Hz.

$L = \dfrac{Z_L}{2\pi f_1}$ et $C = \dfrac{1}{2\pi f_1 Z_C}$. ***AN*** : $L = 0{,}28$ H et $C \approx 56\ \mu$F.

4°)a) La puissance moyenne consommée dans le circuit est : $P = UI\cos\Phi$.

On a : $I=\frac{U}{Z}=\frac{U}{\sqrt{R^2+X^2}}$ et $\cos\Phi=\frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}}$, d'où: $P=\frac{RU^2}{R^2+X^2}=f(R)$.

b) P est maximale si :

$\frac{dP}{dR}=0 \Rightarrow \frac{dP}{dR}=\frac{U^2(R^2+X^2)-U^2\times R\times 2R}{(R^2+X^2)^2}=0$.

Soit: $U^2(R^2+X^2-2R^2)=0$; $U\neq 0$; d'où: $R=\pm X$.

5°)a) $tg\Phi=\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R}=\frac{X}{R}=\pm 1$, d'où: $\Phi=\pm\frac{\pi}{4}$ rad.

$R=\pm\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right) \Leftrightarrow L\omega^2\pm R\omega-\frac{1}{C}=0$: Ce sont deux équations du second degré en ω ; calculons leur discriminant Δ :

$\Delta=R^2+4\frac{L}{C}>0$. Les solutions sont alors :

$$\omega_1=\frac{-R+\sqrt{R^2+4\frac{L}{C}}}{2L} \quad ; \quad \omega_1'=\frac{-R-\sqrt{R^2+4\frac{L}{C}}}{2L}$$

et $\omega_2=\frac{R+\sqrt{R^2+4\frac{L}{C}}}{2L}$; $\omega_2'=\frac{R-\sqrt{R^2+4\frac{L}{C}}}{2L}$

Remarquons que ω_1' et ω_2' sont négatives et par suite, elles sont physiquement inacceptables.

AN: $\omega_1=178{,}57$ rad.s^{-1} et $\omega_2=357{,}14$ rad.s^{-1}.

b) $\frac{\omega_o}{\omega_2-\omega_1}=\frac{\omega_o}{\frac{2}{2}\frac{R}{L}}=\frac{L\omega_o}{R}=Q$: facteur de qualité.

ANNEXE

FICHES SAVOIR-FAIRE

Définitions :

* Une solution est un mélange homogène liquide constitué :

♦ D'un liquide, élément abondant : c'est le solvant .

Le solvant le plus souvent rencontré est l'eau, on parle alors de solution aqueuse.

♦ D'un (ou plusieurs autres) corps, en faible quantité par rapport au solvant, appelé(s) soluté. Exemple : Sel ; Sucre ; ... •

Le soluté est dit électrolyte s'il se transforme en ions (cations et anions)à l'état libre dans la solution après sa dissolution : C'est le phénomène de dissociation.

Exemple : Le sel $NaCl$. Contre exemple : Le sucre.

* La concentration molaire d'une solution, notée C, est le rapport du nombre de mole n de soluté dissout au volume V de la solution.

$$C = \frac{n}{V} \quad \begin{cases} n & \text{en mole} \\ V & \text{en } L \\ C & \text{en } mol.L^{-1} \end{cases}$$

* Molarité : Une solution de concentration molaire $C = 1\ mol.L^{-1}$ est dite solution 1 fois molaire ou de molarité 1 M.

On parle aussi de solutions : 0,1 M ou décimolaire.

0,01 M ou centimolaire.

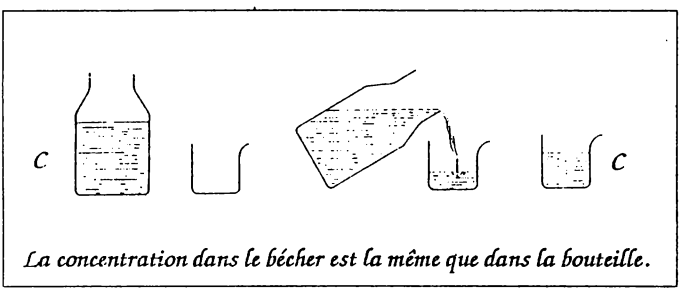
Nous remarquons alors que concentration molaire et molarité se confondent en valeur mais diffèrent par leur unité respective. On confondra souvent les deux notions.

Remarques :

1) Généralement le volume de soluté étant très faible devant celui du solvant, le volume d'une solution est donc peu différent du volume du solvant.

2) Un prélèvement (ou une prise d'essai) d'une solution ne modifie pas sa concentration molaire.

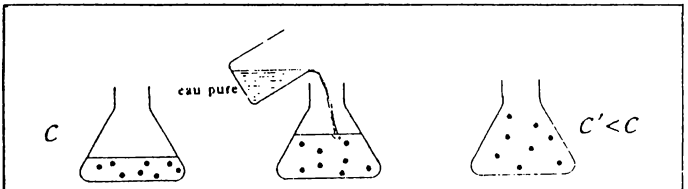
Le prélèvement ou prise d'essai



La concentration dans le bécher est la même que dans la bouteille.

3) Une dilution ne change pas le nombre de mole mais diminue la concentration molaire (par augmentation du volume).

La dilution



Le nombre de mole de soluté est le même avant et après la dilution.

4) Il ne faut pas confondre, concentration molaire d'une solution et concentration molaire d'une espèce chimique donnée en solution :

Exemple : ♦ *Cas d'un électrolyte fort tel que* HCl *:* $HCl \longrightarrow H^+ + Cl^-$

$C = \frac{n_{HCl})_{init}}{V} = [HCl]_{init}$; *mais à l'état final on a :* $[HCl] = 0$ *puisque* HCl *est totalement dissocié.*

♦ *Cas d'un électrolyte faible tel que* $HCOOH$ *:*

$$HCOOH \rightleftharpoons H^+ + HCOO^-$$

$C = \frac{n_{HCOOH})_{init}}{V} = [HCOOH]_{init}$; *mais à l'état final on a :* $0 < [HCOOH] < C$ *puisque* $HCOOH$ *est partiellement dissocié.*

En chimie, les problèmes se posent généralement autour des réactions chimiques. Faut-il donc toujours écrire correctement les équations de ces réactions en prenant soin de préciser quelques points essentiels comme :

* *L'identification des réactifs et des produits de la réaction (ce point est très souvent rappelé par l'énoncé).*

* *L'état physique de chaque constituant.*

* *La détermination des coefficientsstœchiométriques de l'équation de la réaction (d'après le principe de conservation de la matière).*

Notons que la stœchiométrie est à la base de tout raisonnement en chimie.

1) Composition initiale d'un mélange réactionnel Réactif en défaut, Réactif en excès :

Rappelons d'abord qu'une réaction chimique est dite totale si elle se termine par l'épuisement total de l'un au moins de ses réactifs.

Soit la réaction chimique totale d'équation générale :

$$a\mathcal{A} + b\mathcal{B} \longrightarrow c\mathcal{C} + d\mathcal{D}$$

Soient : $n_{o_{\mathcal{A}}}$ *le nombre de mole initial de* $\mathcal{A}$.

$n_{o_{\mathcal{B}}}$ *le nombre de mole initial de* $\mathcal{B}$.

($n_{o_{\mathcal{C}}}$ *et* $n_{o_{\mathcal{D}}}$ *sont supposés nuls)*

Trois cas sont envisagés :

1er cas : Les coefficients stœchiométriques a et b vérifient la relation :

$$\frac{1}{a} n_{o_{\mathcal{A}}} = \frac{1}{b} n_{o_{\mathcal{B}}} \quad \text{ou encore :} \quad b \cdot n_{o_{\mathcal{A}}} = a \cdot n_{o_{\mathcal{B}}}$$

On dit que le mélange réactionnel initial est dans les proportions stœchiométriques : Aucun des réactifs $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *ne restera en excès en fin de réaction.*

Remarque : Lorsqu'un des réactifs est additionné progressivement à un autre jusqu'à obtenir un mélange stœchiométrique, on dit qu'on a atteint l'état d'équivalence.

Exemples : équivalence acido-basique ou équivalence d'oxydo-réduction.

2ème cas : $b \cdot n_{o_{\mathcal{A}}} > a \cdot n_{o_{\mathcal{B}}}$ *: le réactif* $\mathcal{A}$ *est alors en excès et par suite le réactif* $\mathcal{B}$ *est en défaut.*

3ème cas : $b \cdot n_{o_{\mathcal{A}}} < a \cdot n_{o_{\mathcal{B}}}$ *: le réactif* $\mathcal{B}$ *est alors en excès et par suite le réactif* $\mathcal{A}$ *est en défaut.*

Exemple : Soit la réaction de combustion complète du méthane dans le dioxygène (réaction de destruction). L'équation de la réaction s'écrit :

$$CH_4 + 2O_2 \longrightarrow CO_2 + 2H_2O$$

Soit un mélange initial composé de 2 volumes de dioxygène (gaz)et 1 volume de méthane

(gaz). Ces gaz , pris dans les mêmes conditions de température et de pression, renferment respectivement des nombres de moles $n_{O_2})_o$ *et* $n_{CH_4})_o$ *tels que* $n_{O_2})_o = 2\,n_{CH_4})_o$ *conformément à la loi d'Avogadro-Ampère.*

Le mélange initial est donc dans les proportions stœchiométriques.

A la fin de la réaction, le mélange gazeux est donc composé uniquement de dioxyde de carbone et de vapeur d'eau.

2) Evolution de la composition d'un mélange réactionnel au cours du temps :

Au cours d'une réaction chimique totale, le mélange réactionnel, partant d'un état initial (t = 0)pour lequel on n'a que des réactifs en présence, passe par une infinité d'états intermédiaires pour lesquels la quantité de réactifs diminue et la quantité de produits augmente au cours du temps pour enfin arriver à un état final (t_∞ *) pour lequel l'un des réactifs (celui en défaut)disparaît complètement.*

Pour chaque état intermédiaire, la connaissance de la quantité de matière d'un constituant quelconque du mélange (réactif disparu ou produit formé), permettra de déduire la composition du mélange à partir des relations de bases suivantes :

$$\frac{1}{a}n_A)_{réagissant} = \frac{1}{b}n_B)_{réagissant} = \frac{1}{c}n_C)_{formé} = \frac{1}{d}n_D)_{formé}$$

A , B (réactifs de la réaction) C et D (produit de la réaction) sont les constituants du mélange réactionnel.

Exemple d'application : Reprenons la réaction de combustion du méthane.

Soient, à $t = 0$; n_{o_1} *: le nombre de mole de méthane initial*

n_{o_2} *: le nombre de mole de dioxygène initial*

A $0 < t < t_\infty$ *: soit* x *le nombre de mole de* CO_2 *formé. On a alors :*

$n_{H_2O})_{formé} = 2x$; $n_{CH_4})_{réagissant} = x$; $n_{O_2})_{réagissant} = 2x$

d'où : $n_{CH_4})_{restant} = n_{o_1} - x$ *et* $n_{O_2})_{restant} = n_{o_2} - 2x$

Le tableau suivant résumera les résultats précédents :

$$CH_4 + 2\,O_2 \longrightarrow CO_2 + 2\,H_2O$$

Composition à l'état initial $(t = 0)$	n_{o_1}	n_{o_2}	0	0
Composition à l'état Intermédiaire$(0 < t < t_\infty)$	$n_{o_1} - x$	$n_{o_2} - 2x$	x	x

3) Composition du mélange réactionnel à l'état final :

Remarquons d'abord que cette composition finale dépend de la composition initiale. En effet :

* *Si le mélange initial est stœchiométrique :*

$n_{o_2} = 2n_{o_1}$ *alors à* t_∞, *on a* $n_{o_1} - x_\infty = 0$ *et* $n_{o_2} - 2x_\infty = 0$

d'où : $x_\infty = n_{o_1} = \frac{n_{o_2}}{2}$

* *Si le mélange initial est tel que* CH_4 *est le réactif en défaut ; on a alors :*

$n_{o_1} - x_\infty = 0$ *d'où :* $x_\infty = n_{o_1}$

* *Si le mélange initial est tel que* CH_4 *est le réactif en excès ; on a alors :*

$n_{o_2} - 2x_\infty = 0$ *d'où :* $x_\infty = \frac{n_{o_2}}{2}$

Le tableau suivant résumera les résultats précédents :

$$CH_4 + 2O_2 \longrightarrow CO_2 + 2H_2O$$

A $t = 0$	n_{o_1}	n_{o_2}	0	0
A t_∞ *Si le mélange initial est stœchiométrique*	0	0	$n_{o_1} = \frac{n_{o_2}}{2}$	$2n_{o_1} = n_{o_2}$
A t_∞ *Si le méthane est en défaut*	0	$n_{o_2} - 2n_{o_1}$	n_{o_1}	$2n_{o_1}$
A t_∞ *Si le méthane est en excès*	$n_{o_1} - \frac{n_{o_2}}{2}$	0	$\frac{n_{o_2}}{2}$	n_{o_2}

Dans le tableau ci-dessous, est exposée la méthode générale d'écriture des équations bilans d'oxydo-réduction, utile en cinétique chimique ou dans l'étude des équilibres d'oxydo-réduction.

Ce qu'il faut faire	*Exemple*	*Remarques et observations*
1) Définir les réactifs et les produits de la réaction.	*On fait réagir une solution du bichromate de potassium ($K_2Cr_2O_7$) sur une solution de sulfate de fer II ($FeSO_4$) en milieu acide.*	*C'est généralement posé par l'énoncé.*
2) Poser clairement les couples rédox qui vont réagir.	$\underset{\text{forme oxydée}}{(Cr_2O_7^{2-}} / \underset{\text{forme réduite}}{Cr^{3+})}$ et $\underset{\text{forme oxydée}}{(Fe^{3+}} / \underset{\text{forme réduite}}{Fe^{2+})}$	*Les couples rédox usuels doivent être connus par cœur. Bien identifier la forme oxydée et la forme réduite de chaque couple à partir des n.o .*
3) Equilibrer les deux demi-équations rédox : *-j'équilibre l'élément chimique autre que « O » et « H »* *-j'équilibre l'élément « O » par H_2O* *-j'équilibre l'élément « H » par H^+* *- puis les charges par e^- (charge -1)*	$Cr_2O_7^{2-} + ne^- \longrightarrow 2Cr^{3+}$ $Cr_2O_7^{2-} + ne^- \longrightarrow 2Cr^{3+} + 7H_2O$ $Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + ne^- \longrightarrow 2Cr^{3+} + 7H_2O$ $Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e^- \longrightarrow 2Cr^{3+} + 7H_2O$ $Fe^{2+} \longrightarrow Fe^{3+} + 1e^-$	*Il faut toujours opérer dans l'ordre indiqué.* *- La forme oxydée est toujours dans le même membre que les e^- .* *- A ce niveau, on a réalisé l'équilibre des atomes et des charges.*
4) J'élimine mathématiquement les électrons à partir des deux demi-équations (on prend le ppcm).	$\times 1$ la première $\times 6$ la deuxième $Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6Fe^{2+} \longrightarrow 2Cr^{3+} + 7H_2O + 6Fe^{3+}$	*C'est une véritable équation chimique. Elle permet de faire le problème.* *On a la stœchiométrie.*
5)On peut ajouter les ions K^+ et SO_4^{2-} qui en fait ne réagissent pas .	$K_2Cr_2O_7 + 7H_2SO_4 + 6FeSO_4 \longrightarrow Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + 7H_2O + 3Fe_2(SO_4)_3$	*On a ajouté autant de K^+ et de $\frac{1}{2}$ SO_4^{2-} à gauche et à droite.*

I/ Représentation de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale :

Soit la grandeur sinusoïdale $y(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$.

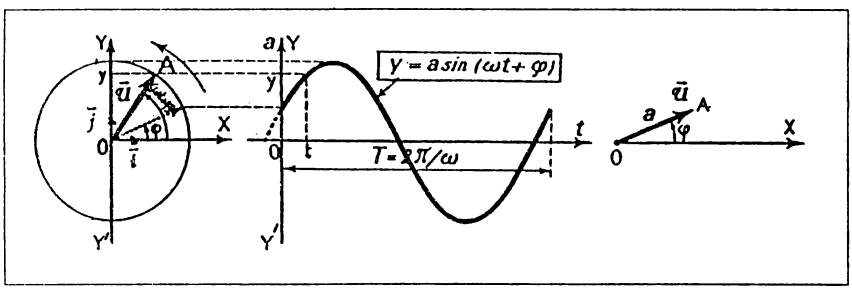
Soit le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *Associons à y le vecteur* $\vec{U} = \overrightarrow{OA}$, *tel que :*

- $\|\vec{U}\| = a$;
- $(\vec{i}, \vec{U}) = \omega t + \varphi$
- $\vec{U}$ *tourne autour de O à la vitesse angulaire* ω.

A chaque instant : $proj_{/y'y}(\vec{U}) = \|\vec{U}\| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{U})$

Soit $proj_{/y'y}(\vec{U}) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi) = y(t)$

Donc, à toute grandeur sinusoïdale de pulsation ω, *on peut faire correspondre un vecteur du plan* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *tournant à la vitesse* ω. *Nous admettrons la réciproque.*



II/ Déphasage entre deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation (synchrones) :

Soient deux grandeurs sinusoïdales : $y_1(t) = a_1\sin(\omega t + \varphi_1)$

$y_2(t) = a_2\sin(\omega t + \varphi_2)$

On appelle différence de phase (ou déphasage) de la grandeur y_2 *par rapport à la grandeur* y_1, *l'angle* $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

- *Si* $\varphi > 0$, y_2 *est dite en avance de phase sur* y_1.
- *Si* $\varphi < 0$, y_2 *est dite en retard de phase sur* y_1.

* *L'examen des vecteurs de Fresnel de deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation permet :*

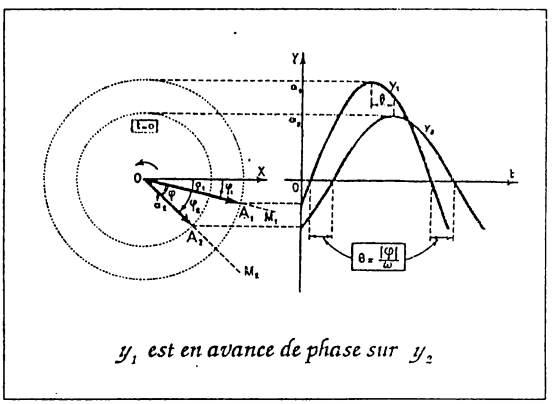
- *de préciser la grandeur qui est en avance sur l'autre*
- *de déterminer le déphasage* $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

♦ *de calculer le décalage horaire* θ *entre les deux grandeurs :* $\theta = \dfrac{|\varphi|}{\omega}$ $\begin{cases} \theta & en\ s \\ \varphi & en\ rad \\ \omega & en rad.s^{-1} \end{cases}$

* *L'examen des courbes représentant ces deux grandeurs en fonction du temps, dans le même système d'axes permet :*

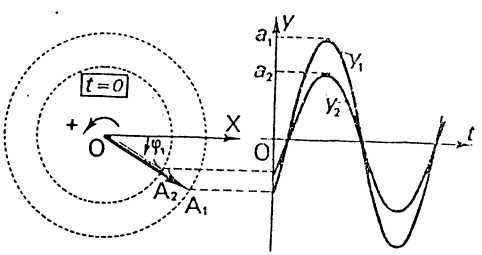
♦ *de préciser la grandeur qui est en avance sur l'autre : c'est celle qui atteint sa valeur maximale avant l'autre (ou encore celle qui s'annule avant l'autre tout en ayant le même sens de variation que l'autre).*

♦ *d'évaluer le décalage horaire* θ *, sur l'axe des temps, et par suite d'en déduire* $|\varphi|$*, puis* φ *.*

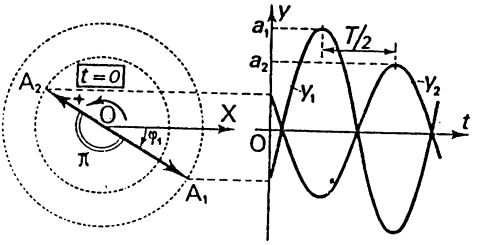
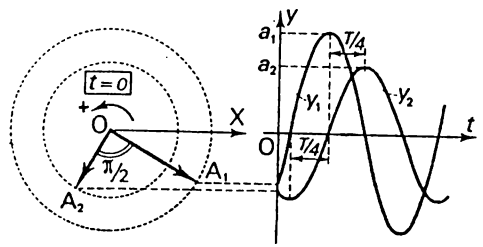


y_1 *est en avance de phase sur* y_2

Valeurs particulières du déphasage :

$\varphi = 2k\pi \quad , (k \in Z)$	

y_1 *et* y_2 *en phase*

$\varphi = (2k+1)\pi$ $(k \in Z)$	 y_1 et y_2 en opposition de phase.
$\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$	 y_1 et y_2 en quadrature de phase.

III/ Somme de deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation :

La somme de deux grandeurs sinusoïdales y_1 et y_2, de même pulsation, est une grandeur sinusoïdale y de même pulsation.

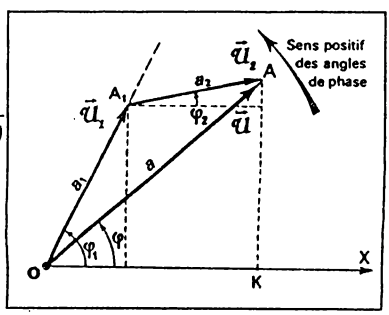
Associons à $y_1(t) = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ *le vecteur de Fresnel :* $\overrightarrow{OA_1} = \vec{U}_1$

Associons à $y_2(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ *le vecteur de Fresnel :* $\overrightarrow{OA_2} = \vec{U}_2$

Le vecteur de Fresnel associé à $y = y_1 + y_2$ *est :* $\overrightarrow{OA} = \vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$

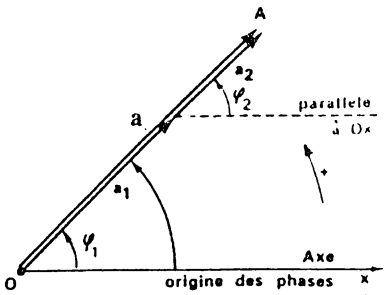
$$y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{avec :} \begin{cases} a = \left\| \vec{U} \right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ tg\varphi = \dfrac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2} \end{cases}$$



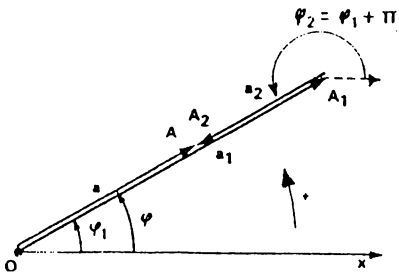
Les cas particuliers de grandeurs sinusoïdales :

y_2 et y_1 en phase



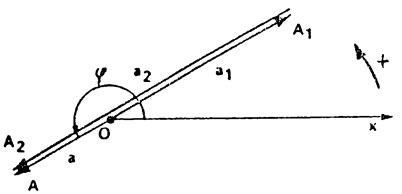
$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ et $a = a_1 + a_2$

y_2 et y_1 en opposition de phase



$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ et $a = a_1 - a_2$

$\varphi = \varphi_1$

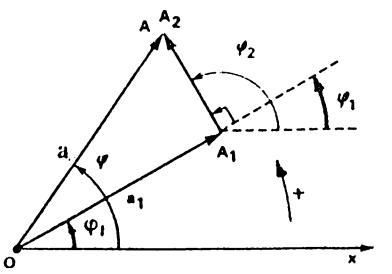


$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ et $a = a_2 - a_1$

$\varphi = \varphi_2$

y_2 et y_1 en quadrature de phase

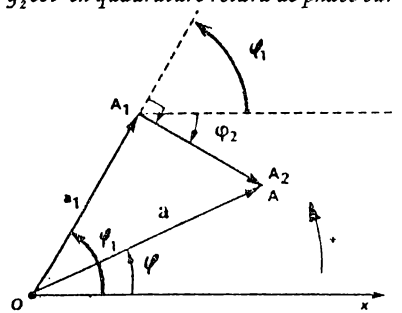
y_2 est en quadrature avance de phase sur y_1



$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ et $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

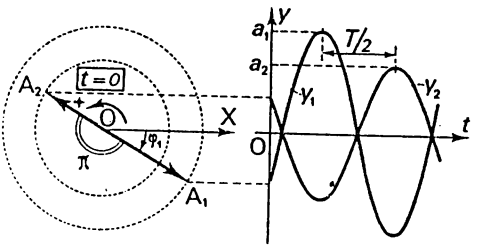
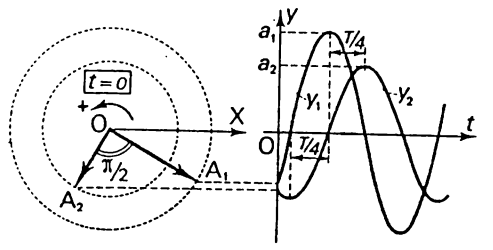
$\varphi > \varphi_1$

y_2 est en quadrature retard de phase sur y_1



$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$ et $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\varphi < \varphi_1$

$\varphi = (2k+1)\pi$ $(k \in Z)$	 y_1 et y_2 en opposition de phase.
$\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$	 y_1 et y_2 en quadrature de phase.

III/ Somme de deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation :

La somme de deux grandeurs sinusoïdales y_1 *et* y_2*, de même pulsation, est une grandeur sinusoïdale y de même pulsation.*

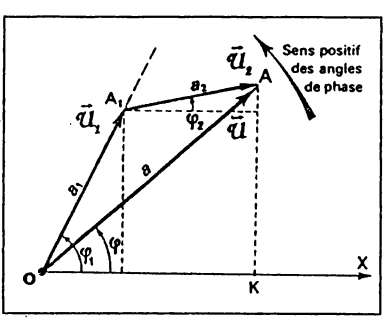
Associons à $y_1(t) = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ *le vecteur de Fresnel :* $\overrightarrow{OA_1} = \vec{U}_1$

Associons à $y_2(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ *le vecteur de Fresnel :* $\overrightarrow{OA_2} = \vec{U}_2$

Le vecteur de Fresnel associé à $y = y_1 + y_2$ *est :* $\overrightarrow{OA} = \vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$

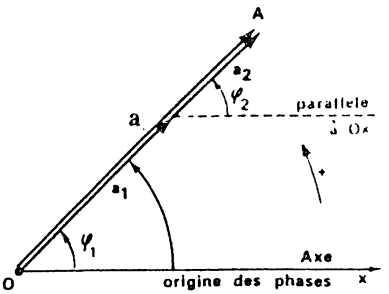
$$y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$$

$$avec : \begin{cases} a = \left\| \vec{U} \right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ tg\varphi = \dfrac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2} \end{cases}$$



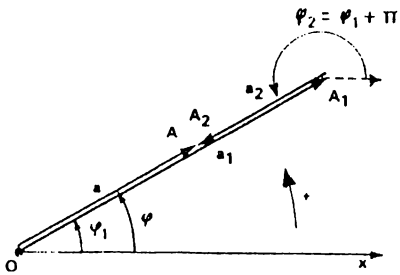
Les cas particuliers de grandeurs sinusoïdales :

y_2 et y_1 en phase



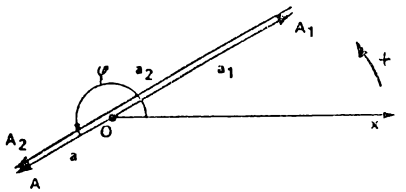
$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ et $a = a_1 + a_2$

y_2 et y_1 en opposition de phase



$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ et $a = a_1 - a_2$

$\varphi = \varphi_1$

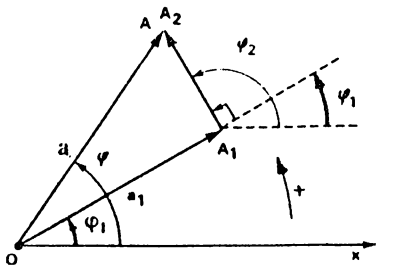


$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ et $a = a_2 - a_1$

$\varphi = \varphi_2$

y_2 et y_1 en quadrature de phase

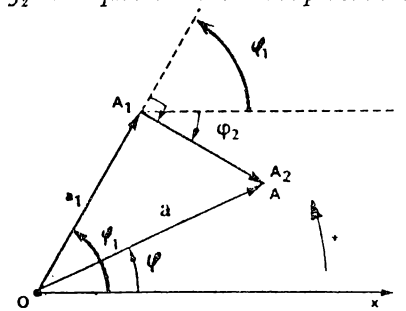
y_2 est en quadrature avance de phase sur y_1



$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ et $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\varphi > \varphi_1$

y_2 est en quadrature retard de phase sur y_1



$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$ et $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\varphi < \varphi_1$

Cas particulier : $a_1 = a_2$

$$a = 2a_1 \left| \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \right|$$

$$tg\varphi = tg\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} & si \quad \cos\left(\dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) > 0 \\ ou \\ \varphi = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \pi & si \quad \cos\left(\dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

IV/ Dérivée et Primitive d'une grandeur sinusoïdale :

Soit $y(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$ *une grandeur sinusoïdale de vecteur de Fresnel associé :*

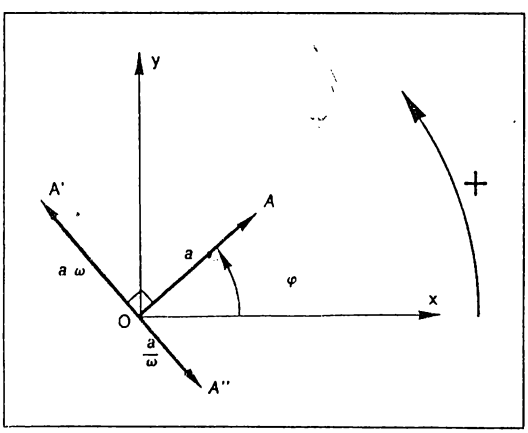
$\vec{U} = \overrightarrow{OA}\ (a, \varphi)$

* *Dérivée de* $y(t)$: $\dfrac{dy(t)}{dt} = a\omega \sin(\omega t + \varphi + \dfrac{\pi}{2})$,

le vecteur de Fresnel associé à $\dfrac{dy(t)}{dt}$ *est :* $\vec{V} = \overrightarrow{OA'}\left(a\omega, \varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)$

* *Primitive de* $y(t)$: $\int y(t)dt = -\dfrac{a}{\omega}\sin(\omega t + \varphi + \dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{a}{\omega}\sin(\omega t + \varphi - \dfrac{\pi}{2})$,

le vecteur de Fresnel associé à $\int y(t)dt$ *est :* $\vec{W} = \overrightarrow{OA''}\left(\dfrac{a}{\omega}, \varphi - \dfrac{\pi}{2}\right)$.



x et $-x$	x et $(\pi + x)$	x et $(\pi - x)$
$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$ $\text{tg}(-x) = -\text{tgx}$ $\text{cotg}(-x) = -\text{cotgx}$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\text{tg}(\pi + x) = \text{tgx}$ $\text{cotg}(\pi + x) = \text{cotgx}$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$ $\text{tg}(\pi - x) = -\text{tgx}$ $\text{cotg}(\pi - x) = -\text{cotgx}$
x et $(\frac{\pi}{2} - x)$ $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$	x et $(\frac{\pi}{2} + x)$ $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$	Equations $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ $\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = \pm y + 2k\pi$ $\sin x = \sin y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - y + 2k\pi \end{cases}$ $\text{tgx} = \text{tgy} \Leftrightarrow x = y + k\pi$

$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$
$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tga} + \text{tgb}}{1 - \text{tga} \cdot \text{tgb}}$$
$$\text{tg}(a - b) = \frac{\text{tga} - \text{tgb}}{1 + \text{tga} \cdot \text{tgb}}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos a - \cos b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \; ; \; 1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$$
$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \; ; \; 1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$1 = \cos^2 a + \sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2\sin a.\cos a$$
$$\text{tg}2a = \frac{2\text{tga}}{1 - \text{tg}^2 a}$$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sinx	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cosx	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tgx	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	
cotgx		$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Achevé d'imprimer en octobre 1997
sur les presses de :

Imprimerie ART PRINT

17, Rue de la Plata 2000 Le Bardo - TUNIS
Tél. : (01) 508 066 - Fax : (01) 508 089

Dépôt légal :
Quatrième trimestre 1997

ISBN 9973 - 17 - 052 - 1 (T_1)

Il est illégal de reproduire une partie quelconque de ce livre sans autorisation de l'auteur. Toute reproduction de publication, par n'importe quel procédé, sera considérée comme une violation des droits d'auteur.